

Zie voor notaties en methoden:

Tensorcalculus for physicists, Oxford, Clarendon Press 1951;

Regular systems of equations and supernumerary coordinates,  
Scriptum 6, Mathematisch Centrum;

Einführung in die neueren Methoden des Differentialgeometrie I,  
Noordhoff, Groningen.

De stof is uitvoerig behandeld in J.A.Schouten en W.v.d.Kulk, Pfaff's  
problem and its generalizations, Oxford, Clarendon Press, 1949.

### 1. Veralgemeeningen Pfaffs probleem

Eenvoudig Pfaffs probleem (1814). Gegeven covariant vectorveld  $w_\lambda$  in  
 $X_m$  analytisch in  $\mathcal{R}(\xi^k)$ . Of ook differentiaalvorm  $w_\lambda d\xi^\lambda$ , dit is  
alleen een verschil in notatie. De vergelijking

$$1.1) \quad w_\lambda d\xi^\lambda = 0 \quad 1)$$

stelt voor een  $\mathcal{E}_{n-1}$ -veld in  $\mathcal{R}(\xi^k)$ . Gevraagd de  $X_m$ 's wier tange-  
rende  $\mathcal{E}_m$  overal in de lokale  $\mathcal{E}_{n-1}$  ligt en dit voor de hoogste waarde  
van  $m$  genaamd  $\nu = m_{\max}$ . Met name vragen wij naar de systemen van  $\infty^{n-m} X_m$ 's  
zo dat er door elk punt één  $X_m$  gaat (normaalsystemen van  $X_m$ 's). Deze  
omhulde  $X_m$ 's of integraal-  $X_m$ 's bestaan altijd voor  $m = 1$  omdat

$$1.2) \quad w_\lambda \frac{d\xi^\lambda}{dt} = 0$$

een (niet lineaire) gewone differentiaalvergelijking is.

Is  $w_\lambda$  van de vorm

$$1.3) \quad w_\lambda = g \partial_\lambda p$$

dan is blijkbaar  $\nu = n-1$

Bepaling van  $\nu$  :

Vorm de comitante van  $w_\lambda$

$$1.4) \quad w_{\mu\lambda}^* = 2 \partial_{[\mu} w_{\lambda]} \quad (\text{rotatie van } w_\lambda)$$

-----  
1) N.B.  $k, \lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau, \omega$  lopen altijd van  $1, \dots, n$  (cursieve  
cijfers).

Bepaal 1e. rang  $2p$  van  $W_{\mu\lambda}$  (altijd even daar  $W_{\mu\lambda}$  alternerend)

2e.  $\lambda$ -rang  $\mathcal{R}$  van het stelsel  $w_\lambda w_{\mu\lambda}$ . Dit is de rang van de matrix

$$1.5) \quad \left\| w_{\mu\lambda} w_\lambda \right\|$$

en ook het aantal lineair onafhankelijke vectoren onder  $w_{\lambda_1}, \dots, w_{\lambda_k}, w_{\lambda}$

Altijd geldt  $\mathcal{R} = 2p + \epsilon$ ,  $\epsilon = 0$  of  $1$ . Dan is

$$1.6) \quad \nu = n - p - \epsilon$$

in ieder gebied waar  $2p$  en  $\mathcal{R}$  constant zijn.

Eerste uitbreiding. Neem stelsel van Pfaffse vormen

$$1.7) \quad C_\lambda^x d\xi^\lambda = 0 \quad ; \quad x = p+1, \dots, n$$

d.w.z.  $n-p$  covariante vectoren  $C_\lambda^x$ . Stelt voor een  $\mathcal{E}_p$ -veld in  $\mathcal{M}(\xi_0)$   
Hetzelfde ook te geven door  $p$  contravariante vectoren  $B_b^k$ ;  $b = 1, \dots, p$  met

$$1.8) \quad B_b^k C_k^x = 0.$$

Twee problemen:

1. Inwendig probleem: De  $X_m$ 's met raak-  $\mathcal{E}_m$  in  $\mathcal{E}_p$  voor  $m$  maximaal  $\leq p$ . (omhulde  $X_m$ 's.)

a. Eerste formulering, Zij

$$1.9) \quad F^e(\xi^k) = \text{const.} \quad ; \quad e = m+1, \dots, n$$

een normaalsysteem van omhulde  $X_m$ 's, dan is

$$1.10) \quad d\xi^\mu \partial_\mu F^e = 0.$$

n.e.v. voor  $d\xi^k$  rakende aan  $X_m$  en

$$1.11) \quad d\xi^\mu C_\mu^x = 0.$$

n.e.v. voor  $d\xi^k$  liggen in  $\mathcal{E}_p$ . Dus n.e.v. voorwaarde is dat

$$(1.11) \subset (1.10) \quad ; \quad ( \subset = \text{is een gevolg van} )$$

b. Tweede formulering. Een normaalsysteem van  $X_m$ 's kan gegeven worden in de parametervorm

$$1.12) \quad \xi^k = \phi^k(\eta^{\alpha}, p^e) \quad ; \quad \begin{matrix} \alpha = 1, \dots, m \\ e = m+1, \dots, n \end{matrix}$$

Lijnelement der  $X_m$  voor iedere waarde der  $p^e$ :

$$1.13) \quad d \xi^\kappa = (\partial_\alpha \phi^\kappa) d\eta^\alpha$$

N.e.v. voorwaarde dus

$$1.14) \quad C_\mu^{\alpha\kappa} (\phi^\kappa(\eta^\alpha, p^\varepsilon)) \partial_\mu \phi^\kappa = 0 \quad \text{voor alle waarden van } p^\varepsilon$$

Dit is een stelsel niet lineaire partiële differentiaalvergelijkingen voor de onbekenden  $\phi^\kappa$ .

2. Uitwendig probleem. De  $X_m$  's met raak-  $\xi_m$  door  $\xi_p$  voor m minimaal  $\geq p$ . (omhullende  $X_m$  's.)

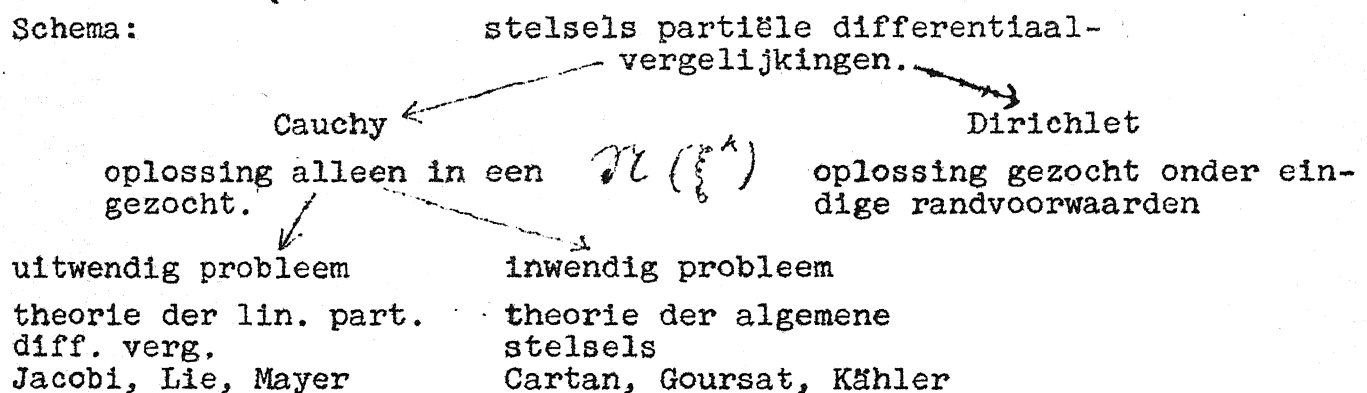
a. Eerste formulering: (1.10)  $\subset$  (1.11)

b. Tweede formulering

$$1.15) \quad B_\ell^\mu \partial_\mu F^\ell = 0 ; \quad \ell = m+1, \dots, n$$

Dit is stelsel lineaire homogene partiële differentiaalvergelijkingen voor de  $F^\ell(\xi^\kappa)$

Schema:



Algemene formulering (omvat uit- en inwendig probleem). Beschouw zeker soort geometrische objecten ( $\xi_m$  's of vectoren of tensoren of erger). Veld A = verzameling van  $\infty^{n+d}$  van deze objecten in de punten van  $\mathcal{N}(\xi^\kappa)$ . Klasse B, de een of andere wel gedefinieerde klasse van velden van dezelfde objecten (bijv. alle  $\xi_m$  's die aan een  $X_q$  raken). Vraag: Bestaan er in A velden van klasse B.

We gaan nu door met het uitwendig probleem.

## 2. Stelsels van homogene lineaire differentiaalvergelijkingen.

Ga uit van

$$2.1) \quad B_\ell^\mu \partial_\mu f = 0 ; \quad \ell = 1, \dots, m$$

en vorm

$$2.2) \quad B_{[\ell}^\nu (\partial_{\mu]} B_{\ell]}^\mu) \partial_\nu f = 0.$$

Iedere oplossing van (2.1) voldoet aan (2.2). Stel onder (2.2) juist  $\mu$ , vergelijkingen lineair onafhankelijk van (2.1). Dan is  $\mu$ , een

arithmetische invariant. We hebben nu  $m + \mu$ , vergelijkingen

$$2.3) \quad B_{\ell}^{\mu} \partial_{\mu} f = 0 ; \quad \ell = 1, \dots, m + \mu,$$

Ga zo door tot stelsel

$$2.4) \quad B_{\ell}^{\mu} \partial_{\mu} f = 0 ; \quad \ell = 1, \dots, m + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$$

dat op deze manier niet meer te verlengen is. Dit stelsel heet volledig. De getallen  $\mu_1, \dots, \mu_n$  zijn alle arithmetische invarianten. (2.1) zelf is volledig als  $B_{\ell}^{\nu} (\partial_{\nu} B_{\ell}^{\kappa})$  lineair van  $B_{\ell}^{\kappa}$  afhangt, dus

$$2.5) \quad B_{\ell}^{\nu} (\partial_{\nu} B_{\ell}^{\kappa}) C_{\kappa}^x = 0.$$

of ook

$$2.6) \quad B_{\ell}^{\nu} (\partial_{\nu} B_{\ell}^{\kappa}) = \sigma_{\ell}^{\alpha} (\xi^{\kappa}) B_{\alpha}^{\kappa}$$

Allereenvoudigste vorm van existentiële theorema Cauchy-Kowalewski 1874: Stel we hebben één onbekende  $f(\xi^{\kappa})$  en één vergelijking van de eerste orde, oplosbaar naar  $\partial_{\alpha} f$ :

$$2.7) \quad \partial_{\alpha} f = \Phi(\xi^{\kappa}, f, \partial_{\alpha} f) ; \quad \alpha = 2, \dots, n$$

waar  $\Phi$  analytisch is in een  $\mathcal{H}(\xi^{\kappa}, C_0, C_{\alpha}) ; \alpha = 2, \dots, n$ . Zij verder gegeven een functie  $\varphi(\xi^{\alpha}) ; \alpha = 2, \dots, n$  analytisch in een  $\mathcal{H}(\xi^{\alpha})$  zo dat

$$2.8) \quad a) \quad \varphi(\xi^{\alpha}) = C_0$$

$$b) \quad (\partial_{\beta} \varphi)_{\xi^{\alpha} = \xi_0^{\alpha}} = C_{\alpha\beta} ; \quad \alpha, \beta = 2, \dots, n.$$

dan bestaat er één enkele oplossing  $f(\xi^{\kappa})$ , analytisch in een  $\mathcal{H}(\xi^{\kappa})$  zo dat

$$2.9) \quad f(\xi^1, \xi^{\alpha}) = \varphi(\xi^{\alpha}) ; \quad \alpha = 2, \dots, n$$

Geval van één lineaire vergelijking

$$2.10) \quad B^{\mu} \partial_{\mu} f = 0.$$

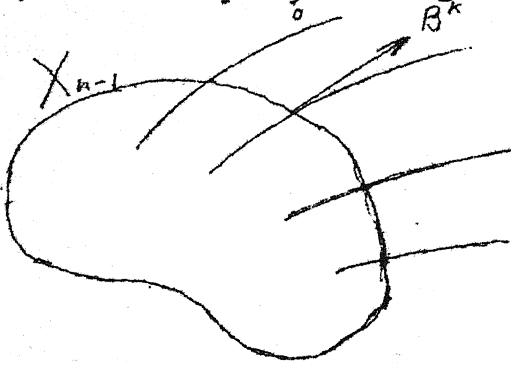
Kies de coördinaten zo dat  $B^1 \neq 0$ . Normeer zo dat  $B^1 = 1$ . Dan krijgt de vergelijking de vorm

$$2.11) \quad \partial_{\alpha} f = \lambda^{\alpha} \partial_{\alpha} f ; \quad \alpha = 2, \dots, n \quad (\lambda^{\alpha} \text{ anal. in een } \mathcal{H}(\xi^{\alpha}))$$

Geef dus nu een functie  $\varphi(\xi^\alpha)$  in een  $\mathcal{N}(\xi^\alpha)$ , dan bestaat er een oplossing  $f(\xi^\alpha)$  analytisch in een  $\mathcal{N}(\xi^\alpha)$  zo dat

$$2.12) \quad f(\xi^1, \xi^\alpha) = \varphi(\xi^\alpha) ; \alpha = 2, \dots, n$$

Neem voor  $\varphi(\xi^\alpha)$  achtereenvolgens  $n-1$  onafhankelijke functies dan ontstaan  $n-1$  onafhankelijke oplossingen en iedere oplossing is een functie van deze  $n-1$ . De principale oplossingen t.o.v.  $\xi^1 = \xi^1_0$ , zijn die, die voor  $\xi^1 = \xi^1_0$  overgaan in  $\xi^2, \dots, \xi^n$ .



Andere vorm van het hoofdresultaat:  
Neem willekeurige  $X_{n-1}$  die de stroomlijnen van  $B^k$  elk in een punt snijdt. Geef op  $X_{n-1}$  een functie  $\phi$  van de plaats. Er bestaat slechts één oplossing  $f$  die op  $X_{n-1}$  met  $\phi$  samenvalt.

Eén enkele oplossing dus, vastgelegd door een functie van  $n-1$  variabelen.

$\phi = \text{const.}$  stelt  $\omega^1 X_{n-2}$  's in  $X_{n-1}$  voor. Elke  $X_{n-1}$  is een omhullende van  $B^k$ . Eén zo'n omhullende kan gegeven worden door 1 functie van  $n-2$  variabelen.

Bepaling van de kosten. Bij (2.10) behoort het geadjungeerde systeem van totale differentiaalvergelijkingen

$$2.13) \quad d \xi^\mu C_\mu^x = 0. \quad x = 1, \dots, m$$

of

$$2.14) \quad d \xi^k \therefore B^k \quad ( \therefore = \text{evenredig met} )$$

Dit zijn echter  $n-1$  gewone differentiaalvergelijkingen van de eerste orde met  $n-1$  onbekenden (simultaan stelsel). De bepaling van één oplossing gelijkstaande met de bepaling van één oplossing van één gewone differentiaalvergelijking van de  $(n-1)$ -de orde met 1 onbekende heet naar Lie een operatie  $n-1$ , kort  $O_{n-1}$  ( $O_0 = \text{quadratuur}$ ).

Eén oplossing van (2.10) (ook integraalfunctie van (2.13) genoemd) kost dus een  $O_{n-1}$ . Neem nieuwe variabelen  $\xi^{\alpha'}$  zo dat  $\xi^1$  gelijk is aan deze oplossing. Dan gaan de vergelijkingen over in

$$a) \quad B^{1'} = 0.$$

2.15)

$$b) \quad B^{\alpha'} \partial_{\alpha'} f(\xi^1, \xi^{\beta'}) ; \alpha', \beta' = 2', \dots, n'$$

Beschouw nu in (2.15 b) de  $\xi^{1'}$  als parameter. Dan kost één oplossing van (2.15 b) een  $O_{n-1}$ , enz. Totaal hebben wij  $n-1$  operaties  $O_{n-1}, \dots, O_0$ .

nodig. Kennen wij toevallig al  $m$  onafhankelijke oplossingen dan zijn nog nodig  $Q_{n-m-1}, \dots, Q_1$

Eén niet homogene lineaire vergelijking.

$$2.16) \quad v^\mu \partial_\mu f = \phi(\xi^*) \quad (v^*, \phi \text{ anal. in een } \mathcal{N}(\xi^*))$$

Stel dat een oplossing is gegeven in de vorm

$$2.17) \quad F(f, \xi^*) = 0 ; \frac{\partial F}{\partial f} \neq 0 \quad (\text{anders niet oplosbaar naar } f)$$

dan volgt

$$2.18) \quad v^\mu \partial_\mu F + \phi(\xi^*) \frac{\partial F}{\partial f} = 0.$$

maar dit is een homogene lineaire vergelijking met  $n+1$  onafhankelijke variabelen  $\xi^*, f$ . Deze heeft dus  $n$  onafhankelijke oplossingen. Eén ervan moet zeker  $f$  bevatten en daarnaast kunnen er dan  $n-1$  zijn die van  $f$  vrij zijn. Deze zijn tevens oplossingen der gereduceerde vergelijking

$$2.19) \quad v^\mu \partial_\mu f = 0.$$

Dus: bepaal  $n-1$  oplossingen  $f^1, \dots, f^{n-1}$  van (2.19) en één oplossing  $f$  van (2.16) (met behulp van (2.18)). Dan is de algemene oplossing

$$2.20) \quad f = f^0 + \psi(f^1, \dots, f^{n-1}) \quad (\psi = \text{willekeurig anal. functie})$$

Systemen van Jacobi. Stel dat

$$2.21) \quad B_{\ell}^{\mu} \partial_\mu f = 0 ; \ell = 1, \dots, p$$

volledig is. Dan geldt

$$2.22) \quad B_{[c}^{\mu} \partial_{|\mu|} B_{\ell]}^* = \tau_{c\ell}^a(\xi^*) B_a^*$$

Men kan dan bewijzen dat er een stel van  $p$  lineaire combinaties der  $B_{\ell}^*$  bestaat

$$2.23) \quad B_{\ell'}^* = B_{\ell'}^{\theta} B_{\ell}^* ; \det(B_{\ell'}^{\theta}) \neq 0 \quad \ell = 1, \dots, p$$

$\ell' = 1', \dots, p'$

zodat de  $\tau_{c\ell'}^a$  alle nul zijn:

$$2.24) \quad B_{[c}^{\mu} \partial_{|\mu|} B_{\ell']}^* = 0.$$

Men noemt dan

$$2.25) \quad B_{f'}^{\mu} \partial_{\mu} f = 0.$$

een systeem van Jacobi. De naam "Jacobi" slaat dus alleen op de vorm van het systeem. Ieder systeem kan in de vorm van een systeem van Jacobi gebracht worden.

De vorm van een systeem van Jacobi is invariant bij coördinatentransformatie doch niet bij  $\ell$ -transformaties.

Speciale systemen van Jacobi. Men kan bewijzen dat de  $\ell$ -transformatie, gegeven een bepaald coördinatenstelsel  $(\kappa)$ , zo kan worden ingericht dat

$$2.26) \quad B_{\ell}^{\alpha} = \delta_{\ell}^{\alpha} ; \ell = 1, \dots, m ; \alpha = 1, \dots, m$$

Voor deze speciale waarden die dus aan  $(\kappa)$  zijn aangepast, gebruiken wij in plaats van  $\ell$  ook griekse indices en vaste indices  $1, \dots, m$  in plaats van  $1, \dots, m$ , dus

$$2.27) \quad B_{\beta}^{\alpha} \stackrel{*}{=} \delta_{\beta}^{\alpha}$$

De matrix van  $B_{\beta}^{\alpha}$  ziet er dan als volgt uit

$$2.28) \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & B_{p+1}^{\alpha} & \dots & B_1^{\alpha} \\ & \ddots & & & \\ 0 & & 1 & B_{p+1}^{\alpha} & \dots & B_p^{\alpha} \end{array} \right| \\ \downarrow \end{array}$$

en de vergelijkingen (2.21) krijgen de vorm

$$2.29) \quad \boxed{\partial_{\beta} f + B_{\beta}^{\gamma} \partial_{\gamma} f \stackrel{*}{=} 0}$$

De speciale vorm van Jacobi is niet invariant bij coördinatentransformaties.

Dit duiden wij aan met  $\stackrel{*}{=}$ . Dit teken drukt uit dat de aandacht wordt gevestigd op het feit dat de vergelijking niet meer invariant is bij coördinatentransformaties. Het gebruik van  $\stackrel{*}{=}$  is niet verplicht, men gebruikt het alleen als het gewenst voorkomt de aandacht te vestigen. Maar er zijn wel gevallen waarin dit zo gewenst is dat men beter  $\partial_{\lambda}$  niet  $=$  te gebruiken, bijv. in  $e_{\lambda}^{\kappa} \stackrel{*}{=} A_{\lambda}^{\kappa}$ , en dergelijke formules waar levende indices aan de ene kant corresponderen met dode indices aan de andere kant. De vorm van de vergelijking (2.29) is wel invariant.

voor transformaties van de vorm

$$2.30) \quad \xi^{\alpha'} = \delta^{\alpha'}_{\alpha} \xi^{\alpha} \quad \alpha = 1, \dots, p; \quad \alpha' = 1', \dots, p'. \\ \xi^{\gamma'} = \xi^{\gamma'}(\xi^{\alpha}, \xi^{\eta}) \quad \gamma = p+1, \dots, n; \quad \gamma' = (p+1)', \dots, n'.$$

Voor een systeem van Jacobi neemt de volledigheidsvoorwaarde de vorm aan

$$2.31) \quad \partial_{[\gamma} B_{\beta]}^{\gamma'} + B_{[\gamma}^{\eta} \partial_{\eta]} B_{\beta]}^{\gamma'} \stackrel{*}{=} 0.$$

Men kan tegelijk het geadjungeerde systeem

$$2.32) \quad C_{\mu}^x d\xi^{\mu}$$

aan een zodanige  $X$ -transformatie onderwerpen dat ook dit stel zeer eenvoudig wordt. Men moet dus  $n-p$  vectoren  $C_{\mu}^{\gamma}; \gamma = p+1, \dots, n$  bepalen zo dat

$$2.33) \quad C_{\mu}^{\gamma} B_{\beta}^{\mu} = 0; \quad \beta = 1, \dots, p; \quad \gamma = p+1, \dots, n$$

Men ziet direct dat

$$2.34) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad C_{\eta}^{\gamma} &= \delta_{\eta}^{\gamma} \\ \text{b)} \quad C_{\beta}^{\gamma} &= -B_{\beta}^{\gamma} \end{aligned}$$

voldoen. Met deze waarden krijgt (2.32) de vorm

$$2.35) \quad C_{\beta}^{\gamma} d\xi^{\beta} + d\xi^{\gamma} \stackrel{*}{=} 0.$$

met de voorwaarde (zie (2.31))

$$2.36) \quad \partial_{[\gamma} C_{\beta]}^{\gamma'} - C_{[\gamma}^{\eta} \partial_{\eta]} C_{\beta]}^{\gamma'} \stackrel{*}{=} 0.$$

N.B. De vorm van Jacobi en de speciale vorm van Jacobi kunnen steeds worden gevonden zonder integraties.

### 3. De oplossingen van een volledig systeem.

Breng het systeem in de speciale vorm van Jacobi (2.29). Dan zien wij dat  $\xi^{\gamma}; \dots, \xi^{\beta}$  alvast zeker geen oplossingen zijn. Neem nu de eerste vergelijking

$$3.1) \quad \partial_1 f + B_1^{\gamma} \partial_{\gamma} f = 0.$$

dan zijn  $\xi^2, \dots, \xi^p$  van deze ene vergelijking zeker wel oplossingen. Er zijn dus nog  $n-p$  andere oplossingen, te verkrijgen door  $0_{n-p}, \dots, 0_1$ . Neem de principale d.z. die, die voor  $\xi^1 = \xi^1$  overgaan in  $\xi^2, \dots, \xi^n$ . Daaronder bevinden zich alvast  $\xi^2, \dots, \xi^p$ . Ga nu over tot nieuwe coördinaten  $\xi^{k'}$  en richt het zo in dat  $\xi^{1'}, \dots, \xi^{p'}$  juist gelijk aan  $\xi^1, \dots, \xi^p$  zijn en dat  $\xi^{(p+1)'}, \dots, \xi^{n'}$  juist die andere  $n-p$  principale oplossingen zijn. Dan weten wij dat  $\xi^{2'}, \dots, \xi^{n'}$  allemaal oplossingen van (3.1) zijn en verder dat

$$3.2) \quad A_{\beta}^{\alpha'} = \delta_{\beta}^{\alpha'} ; A_{\beta'}^{\alpha} = \delta_{\beta'}^{\alpha} ; A_{\eta'}^{\alpha} = 0 ; A_{\eta}^{\alpha} = 0.$$

De vergelijkingen (2.29) gaan nu over in

$$3.3) \quad A_{\beta}^{\alpha'} \partial_{\beta'} f + A_{\beta}^{\gamma'} \partial_{\gamma'} f + B_{\beta}^{\gamma} A_{\gamma}^{\gamma'} \partial_{\gamma'} f = 0 ; \beta = 1, \dots, p ; \beta' = 1', \dots, p' ; \gamma = p+1, \dots, n ; \gamma' = (p+1)', \dots, n'$$

of

$$3.4) \quad \partial_{\beta'} f + B_{\beta}^{\gamma'} \partial_{\gamma'} f = 0.$$

waar

$$3.5) \quad B_{\beta}^{\gamma'} \stackrel{\text{def.}}{=} \delta_{\beta}^{\gamma'} (A_{\beta}^{\gamma'} + B_{\beta}^{\gamma} A_{\gamma}^{\gamma'})$$

Van de nieuwe vergelijkingen

$$3.6) \quad \partial_{\beta'} f + B_{\beta}^{\gamma'} \partial_{\gamma'} f = 0 ; \beta' = 1', \dots, p' ; \gamma' = (p+1)', \dots, n' \quad (\text{van de eerste vergelijking})$$

zijn nu  $\xi^{2'}, \dots, \xi^{n'}$  oplossingen en daaruit volgt dat

$$3.7) \quad B_{\beta'}^{\gamma'} = 0 ; \gamma' = (p+1)', \dots, n'.$$

zodat de vergelijkingen (3.6) overgaan in

$$3.8) \quad \begin{aligned} & a) \quad \partial_{1'} f = 0. \\ & b) \quad \partial_{\gamma'} f + B_{\gamma}^{\gamma'} \partial_{\gamma'} f = 0 ; \gamma' = 2', \dots, p' ; \gamma = (p+1)', \dots, n'. \end{aligned}$$

Laat de accenten nu voor het gemak weer vallen:

$$3.9) \quad \begin{aligned} & a) \quad \partial_1 f = 0. \\ & b) \quad \partial_{\gamma} f + B_{\gamma}^{\gamma} \partial_{\gamma} f = 0. \end{aligned}$$

dan zijn de condities nu

$$3.10) \quad \begin{aligned} & a) \quad B_{[\delta} \partial_{|\eta|} B_{\gamma]} + \partial_{[\delta} B_{\gamma]} ; \gamma, \delta = 2, \dots, p ; \gamma, \eta = p+1, \\ & b) \quad B_{[\delta} \partial_{|\eta|} B_{\gamma]} + \partial_{[\delta} B_{\gamma]} = \partial_{\gamma} B_{\gamma} = \frac{1}{2} \partial_{\gamma} B_{\gamma} = 0 \end{aligned}$$

Bijgevolg is nu (3.9 b) een stel van  $p-1$  vergelijkingen in de  $n-1$  onafhankelijke variabelen  $\xi^1, \dots, \xi^n$ . Met dat stel gaat men door. Kosten van de tweede trap wederom  $O_{n-p}, \dots, O_1$ . Dit  $p$  maal, totale kosten dus

3.11)  $p \times (O_{n-p}, \dots, O_1)$ .

Na teruggang tot de oorspronkelijke coördinaten gaan de  $n-p$  aldus gevonden oplossingen voor  $\xi^\alpha = \xi_0^\alpha$  juist over in  $\xi^{p+1}, \dots, \xi^n$ . Het zijn derhalve principale oplossingen t.o.v.  $\xi^\alpha = \xi_0^\alpha$ . Zijn  $f^1, \dots, f^p$  deze oplossingen, dan is  $F(f^1, \dots, f^p)$  eveneens een oplossing, voor  $\xi^\alpha = \xi_0^\alpha$  overgaande in  $F(\xi^{p+1}, \dots, \xi^n)$ .

#### 4. Niet homogene lineaire systemen.

4.1)  $v_b^\mu \partial_\mu f = \varphi_b(\xi^k) ; b = 1, \dots, p.$

Voorwaarden:  $v_b^k$  en  $\varphi_b$  analytisch in een  $\mathcal{H}(\xi^k)$  verder

4.2)  $\|v_b^\mu \varphi_b\|$  heeft rang  $p$  ;  $\|v_b^\mu\|$  heeft rang  $p$ .

(anders waren de vergelijkingen of afhankelijk of onoplosbaar). Zij

4.3)  $F(f, \xi^k) = 0 ; \frac{\partial F}{\partial f} \neq 0.$

een oplossing. Dan ontstaan de  $p$  homogene vergelijkingen

4.4)  $\frac{\partial F}{\partial f} \varphi_b + v_b^\mu \partial_\mu F = 0.$

in  $n+1$  onafhankelijke veranderlijken  $\xi^k, f$ . Dit stelsel is volledig mits (schrijf voor het gemak eerst even  $\varphi_b = v_b^a ; f = \xi^a$ )

a)  $v_{[c}^\mu \partial_{|\mu|} v_{b]}^k = \sigma_{cb}^a(\xi^k) v_a^k$

4.5)

b)  $v_{[c}^\mu \partial_{|\mu|} \varphi_{b]} = \sigma_{cb}^a(\xi^k) \varphi_a$

Men noemt dan ook het niet homogene stelsel (4.1) volledig. N.e.v. zijn (4.2), (4.5 a), (4.5 b).

Is (4.4) niet volledig dan gaat men (4.4) verlengen tot er een volledig systeem komt:

4.6)  $\frac{\partial F}{\partial f} \varphi_b + v_b^\mu \partial_\mu F = 0 ; b = 1, \dots, p + \mu_1 + \dots + \mu_n.$

en daarbij hoort dan

$$4.7) \quad v^\mu \partial_\mu F = \varphi \left( \xi^k \right).$$

Is nu voldaan aan de voorwaarden:

$$4.8) \quad \left\| v^\mu \varphi \right\| \text{ heeft rang } p + \mu_1 + \dots + \mu_n; \left\| v^\mu \right\| \text{ heeft rang } p + \mu_1 + \dots + \mu_n$$

en bovendien natuurlijk aan de voorwaarden dat (4.6) volledig is, dan heeft (4.1) oplossingen. In het andere geval niet.

## 5. Mayer systemen.

Bij het systeem in de speciale vorm van Jacobi

$$5.1) \quad (I) \quad \left[ \partial_\beta f + \beta^\gamma \partial_\gamma f = 0 \right] ; \beta = 1, \dots, p ; \gamma = p+1, \dots, n.$$

hoort het geadjungeerde systeem

$$5.2) \quad (II) \quad \left[ d\xi^\gamma = -C_\beta^\gamma d\xi^\beta \right]$$

Beschouw nu de  $\xi^\gamma$  als onbekende functies der  $\xi^\alpha$ ;  $\alpha = 1, \dots, p$ , dan is (II) equivalent met

$$5.3) \quad (III) \quad \left[ \partial_\beta \xi^\gamma = -C_\beta^\gamma (\xi^\alpha, \xi^\eta) \right] ; \beta, \gamma = 1, \dots, p ; \alpha, \eta = p+1, \dots, n.$$

Als de voorwaarden van het volledig zijn van (I) (of II) vervuld zijn:

$$5.4) \quad \left[ \partial_\gamma C_\beta^\gamma = C_{[\gamma}^\eta \partial_{\eta]} C_{\beta]}^\gamma \right]$$

(ook wel genoemd integrabiliteitsvoorwaarden van (III) dan noemt men III een Mayer systeem.

Stel eens dat  $f^\gamma(\xi^k)$  de principale oplossingen zijn van (I) to.v.  $\xi^\alpha = \xi^\alpha$ , dan zijn

$$5.5) \quad f^\gamma(\xi^k) = C^\gamma \quad (C^\gamma = \text{constanten})$$

n-p onafhankelijke integralen van II (de principale integralen t.o.v.  $\xi^\alpha = \xi^\alpha$ ) (5.5) stelt een stelsel van  $\infty^{n-p}$   $X_p$ 's voor. Vraag: welke dezer  $X_p$ 's gaat door  $\xi^k$ ? Schrijf de vergelijking eerst op voor  $\xi^\alpha = \xi^\alpha$  dan krijgt (5.5) de som

$$5.6) \quad f^\gamma(\xi^\alpha, \xi^\gamma) = \xi^\gamma = C^\gamma.$$

en men krijgt dus de gezochte  $X_p$  indien men voor de  $C^s$  de waarden  $\xi^s$  neemt.

Los nu de  $\xi^s$  op uit (5.5) (dit kan altijd omdat  $\text{Det}(\partial_\eta f^s) \neq 0$ ) dan komt er

$$5.7) \quad \xi^s = \phi^s(\xi^\alpha, C^s).$$

maar dit zijn n-p oplossingen van (III) die afhangen van n-p constanten. Zet men  $C^s = \xi^s$  en  $\xi^\alpha = \xi^\alpha$  dan moet de linkerzijde in  $\xi^s$  overgaan, bijgevolg is

$$5.8) \quad \xi^s = F^s(\xi^\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=} \phi^s(\xi^\alpha, \xi^s)$$

een stel oplossingen van (III) dat voor  $\xi^\alpha = \xi^\alpha$  overgaat in de constanten  $\xi^s$ . Dit stel oplossingen heet het stel der principale oplossingen van III t.o. van  $\xi^\alpha = \xi^\alpha$ . We hebben nu voor (I), (II) en (III) elk principale oplossingen resp. integralen die uit elkaar kunnen worden afgeleid.

De integratie van (I) of van (II) of van (III) zijn dus (mits de volledigheidsvoorwaarden vervuld zijn) gelijkwaardige problemen.

Ga nu uit van (III) en neem de  $t$  eerste vergelijkingen

$$5.9) \quad \partial_\delta \xi^t = -C_\delta^t(\xi^\alpha, \xi^\eta); \quad \delta = 1, \dots, t; \quad \xi, \eta = p+1, \dots, n.$$

en beschouw  $\xi^{t+1}, \dots, \xi^p$  als parameters. Dan hebben we weer een stel dat er net uitziet als een Mayer systeem met t onafhankelijke veranderlijken. En aangezien inderdaad uit (5.4) volgt dat

$$5.10) \quad \partial_{[C} C_{b]}^s = C_{[C}^s \partial_{\eta]} C_\delta^s; \quad b, C, = 1, \dots, t; \quad \xi, \eta = p+1, \dots, n.$$

is (5.9) inderdaad een Mayer systeem. Dit heet de verkorting van III t.o. van  $\xi^1, \dots, \xi^t$ .

Om (III) op te lossen verkorten we naar  $\xi^1$ :

$$5.11) \quad \partial_\gamma \xi^s = -C_\gamma^s(\xi^1, \xi^\varphi, \xi^\eta); \quad \varphi = 2, \dots, p; \quad \xi, \eta = p+1, \dots, n.$$

en hierin zijn nu de  $\xi^\varphi$  parameters.  $\xi^1$  is de onafhankelijke variabele en dus is (5.11) een simultaan systeem van n-p gewone differentiaalvergelijkingen van de eerste orde. We bepalen de principale oplossingen t.o. van  $\xi^\varphi$ , dat zijn dus die, die overgaan in  $\xi^\varphi$  voor alle willekeurige waarden der  $\xi^\varphi$ :

$$5.12) \quad \xi^s = F^s(\xi^1, \xi^\varphi); \quad F^s(\xi^1, \xi^\varphi) = \xi^s;$$

(Dit kost overigens een  $\underbrace{\text{operatie}}_{\substack{O_{n-p-1, \dots, 0, 1} \\ n-p}} \varphi = 2, \dots, p; \quad \xi = p+1, \dots, n.$  Nu gaan we nieuwe variabelen  $\xi^{t'}$  invoeren:

$$5.13) \quad \begin{aligned} \xi^{\alpha'} &= \xi^{\alpha'} \\ \xi^{t'} &= \xi^t - F^t(\xi^{\alpha'}) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \alpha &= 1, \dots, p; \\ \alpha' &= 1', \dots, p'; \\ \xi &= p+1, \dots, n; \\ \xi' &= (p+1)', \dots, n'. \end{aligned}$$

De transformatie is van de vorm (2.30) zodat de speciale Jacobische vorm gehandhaafd blijft. Bovendien weten we uit (3.5) hoe de  $B_{\beta}^{\xi}$  en dus ook hoe de  $C_{\beta}^{\xi} = -B_{\beta}^{\xi}$  zich transformeren

$$5.14) \quad C_{\beta'}^{\xi'} = \delta_{\beta'}^{\beta} (C_{\beta}^{\xi} \delta_{\xi'}^{\xi} - A_{\beta}^{\xi'})$$

De nieuwe vergelijkingen

$$5.15) \quad \partial_{\beta'} \xi^{\xi'} = -C_{\beta'}^{\xi'}$$

luiden dus uitgeschreven als volgt:

de eerste:

$$5.16) \quad \partial_1 \xi^{\xi'} = -C_1^{\xi'} = -\delta_1^{\beta} C_{\beta}^{\xi'} \delta_{\xi'}^{\xi} - \delta_1^{\beta} \delta_{\xi'}^{\xi} \partial_{\beta} F^{\xi} = 0.$$

(omdat  $F^{\xi}$  een oplossing van (5.11) is en dus  $\partial_{\beta} F^{\xi} = -C_{\beta}^{\xi}$ )

de andere:

$$5.17) \quad \partial_{\varphi'} \xi^{\xi'} = -C_{\varphi'}^{\xi'} (\xi^{\xi'}, \xi^{\psi'}, \xi^{\eta'}) ; \varphi', \psi' = 2', \dots, p'; \xi', \eta' = (p+1)', \dots, n'.$$

In de vergelijkingen (5.17) valt nu echter de  $\xi^{\xi'}$  weg omdat volgens de integrabiliteitsvoorwaarden

$$5.18) \quad \partial_{\varphi'} C_{\varphi'}^{\xi'} = C_{[\varphi'}^{\xi'} \partial_{\eta']} C_{\varphi'}^{\xi'} = 0.$$

nul is en bovendien  $C_1^{\xi'} = 0$  is. Alles valt dus weg behalve

$$5.19) \quad \partial_1 C_{\varphi'}^{\xi'} = 0 ; \varphi' = 2', \dots, p'; \xi' = (p+1)', \dots, n'.$$

waaruit blijkt dat  $C_{\varphi'}^{\xi'}$  alleen van  $\xi^{\psi'}$  en  $\xi^{\eta'}$  afhangt. We hebben dus het probleem verlaagd tot een Mayer systeem met  $n-p$  onbekenden en  $p-2$  onafhankelijke variabelen. Daarmee gaan we door en wel  $p$  maal. Elke stap kost  $0_{n-p}, \dots, 0_1$ . Dus tot nu toe hebben we niets gewonnen.

We zouden echter winnen indien na de eerste stap eens mocht blijken dat de  $C_{\varphi'}^{\xi'}$  alle nul waren. Want dan was er in (5.17) niets te integreren we konden direct de oplossingen opschrijven:  $\xi^{\xi'} = \xi_0^{\xi'}$ .

We gaan nu bewijzen dat deze uitzonderlijk gunstige omstandigheid zich steeds voordoet indien in III toevallig

$$5.20) \quad \{C_{\varphi}^{\xi}(\xi^{\xi'})\}_{\xi^{\xi'} = \xi_0^{\xi'}} = 0.$$

Inderdaad volgt dan uit (5.14)

$$5.21) \quad C_{\varphi'}^{\xi'} (\xi^{\xi'}, \xi^{\psi'}, \xi^{\eta'}) = \delta_{\varphi'}^{\beta} \delta_{\xi'}^{\xi} C_{\beta}^{\xi} - \delta_{\varphi'}^{\beta} A_{\beta}^{\xi'} \\ = \delta_{\varphi'}^{\beta} \delta_{\xi'}^{\xi} C_{\beta}^{\xi} + \delta_{\varphi'}^{\beta} \delta_{\xi'}^{\xi} \partial_{\beta} F^{\xi}$$

$\beta = 1, \dots, p; \varphi' = 2, \dots, p; \xi = p+1, \dots, n;$   
 $\varphi', \psi' = 2', \dots, p'; \xi' = (p+1)', \dots, n'.$

en indien men in deze vergelijkingen  $\xi^{\xi'} = \xi_0^{\xi'}$  zet verandert de linkerzijde niet en komt er rechts ingevolge (5.12) en (5.20)

$$5.22) \quad \delta_{\varphi'}^{\beta} \delta_{\xi'}^{\xi} C_{\beta}^{\xi} (\xi_0^{\xi'}, \xi_0^{\psi'}, \xi_0^{\eta'}) + \delta_{\varphi'}^{\beta} \delta_{\xi'}^{\xi} (\partial_{\beta} F^{\xi})_{\xi^{\xi'} = \xi_0^{\xi'}} = \\ = \delta_{\varphi'}^{\beta} \delta_{\xi'}^{\xi} C_{\beta}^{\xi} (\xi_0^{\xi'}, \xi_0^{\psi'}, \xi_0^{\eta'}) = 0.$$

Daarmede is nu bewezen:

51) Indien de  $C_{\varphi}^{\xi}$  ;  $\varphi = 2, \dots, p$  uit het Mayer systeem

$$5.23) \quad \partial_{\beta} \xi^{\xi} = -C_{\beta}^{\xi}(\xi^{\xi}) ; \beta = 1, \dots, p ; \xi = p+1, \dots, n.$$

identiek nul zijn in  $\xi^2, \dots, \xi^p$  voor  $\xi^1 = \xi_0^1$ , dan zijn de principale oplossingen met betrekking tot  $\xi^1 = \xi_0^1$  van het verkorte systeem

$$5.24) \quad \partial_1 \xi^{\xi} = -C_1^{\xi}(\xi^{\xi}),$$

waarin  $\xi^2, \dots, \xi^p$  als parameters worden opgevat, tevens de principale oplossingen van het systeem (5.24) met betrekking tot  $\xi^{\alpha} = \xi_0^{\alpha}$  ;  $\alpha = 1, \dots, p$ , indien  $\xi^2, \dots, \xi^p$  in deze oplossingen weer als gewone variabelen worden opgevat.

In dit speciale geval komen we dus uit met één enkel stel operaties  $O_{n-p}, \dots, O_1$ .

Nu kan men altijd zorgen dat dit geval optreedt en wel door een coördinatentransformatie. Opdat de speciale Jacobische vorm gehandhaafd blijft zal in elk geval moeten gelden

$$5.25) \quad \xi^{\alpha'} = f^{\alpha'}(\xi^{\alpha}) ; \alpha = 1, \dots, p ; \alpha' = 1', \dots, p'.$$

Laten we daar nu bij nemen

$$5.26) \quad \xi^{\xi'} = \delta_{\xi}^{\xi'} \xi^{\xi} ; \xi = p+1, \dots, n ; \xi' = (p+1)', \dots, n'.$$

Dan is

$$5.27) \quad C_{\beta'}^{\xi'} = A_{\xi}^{\xi'} C_{\beta}^{\xi} A_{\beta'}^{\beta} = \delta_{\xi}^{\xi'} C_{\beta}^{\xi} A_{\beta'}^{\beta}.$$

en dus

$$5.28) \quad C_{\varphi'}^{\xi'} = \delta_{\xi}^{\xi'} C_{\varphi}^{\xi} A_{\varphi'}^{\varphi} ; \varphi' = 2', \dots, p'.$$

We verlangen nu dat

$$5.29) \quad C_{\varphi'}^{\xi'}(\xi_0^{\xi'}, \xi^{\varphi'}, \xi^{\eta'}) = 0 ; \varphi', \eta' = 2', \dots, p' ; \xi', \eta' = (p+1)', \dots, n'.$$

zal zijn. Wil dit algemeen gelden, d.w.z. voor iedere keuze van de functies  $C_{\beta}^{\xi}$  dan moet er dus in  $A_{\varphi'}^{\beta}$  een factor  $\xi^1 - \xi_0^1$  zitten.

Neem nu met Lie de transformatie

$$5.30) \quad \xi^1 = \xi_0^1 + \xi^1 ; \xi^{\varphi} = \xi_0^{\varphi} + \xi^1 \delta_{\varphi}^{\varphi} ; \xi^{\xi} = \delta_{\xi}^{\xi} \xi^{\xi'} ;$$

(dus  $\xi_0^1 = 0$ )  $\varphi = 2, \dots, p ; \varphi' = 2', \dots, p' ;$

$$5.31) \quad A_{\varphi'}^1 = 0 ; A_{\varphi'}^{\varphi} = \delta_{\varphi}^{\varphi} \delta_{\varphi'}^{\varphi} ; \xi = p+1, \dots, n ; \xi' = (p+1)', \dots, n'.$$

en we hebben

$$5.32) \quad C_{\varphi'}^{\xi'} = \delta_{\xi}^{\xi'} \delta_{\varphi}^{\varphi} C_{\varphi}^{\xi}(\xi^{\xi'} - \xi_0^{\xi'})$$

zodat inderdaad aan de gestelde voorwaarde voldaan is.

Maar nu is de moeilijkheid dat de transformatie (5.30) geen ordelijke coördinatentransformatie meer is omdat de functionaaldeterminant voor  $\xi^1 = \xi_0^1$  nul wordt. Inderdaad is immers de determinant van  $A_{\beta'}^{\beta}$  :

$$5.33) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \xi^{p'} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{voor } \xi^{1'} = \xi^{p'} (=0).$$

Dat betekent dus dat we de op den nieuwe coördinaten verkregen oplossing niet terug kunnen transformeren. Niettegenstaande dat gaan we die oplossing toch maar eens bepalen. We bepalen dus van het verkorte systeem (in de nieuwe coördinaten)

$$5.34) \quad \partial_1 \xi^z = -C_1^z(\xi^{1'}, \xi^{p'}, \xi^z)$$

de principale oplossingen t.o.v.  $\xi^{1'} = \xi^{p'} (=0)$  met de  $\xi^{p'}$  als parameters:

$$5.35) \quad \xi^z = F^z(\xi^{1'}, \xi^{p'})$$

met de voorwaarde

$$5.36) \quad \xi^z = F^z(\xi^{1'}, \xi^{p'})$$

Waaruit blijkt dat dit nu vanzelf ook de oplossing zijn van

$$5.37) \quad \partial_{p'} \xi^z = -C_{p'}^z$$

mits men de  $\xi^{p'}$ ;  $p' = 2', \dots, p'$  weer als variabelen opvat. Wat we nu willen hebben zijn de  $\xi^z$  uitgedrukt in de  $\xi^\alpha$ . We kunnen nu wel zulke uitdrukkingen halen uit (5.35), namelijk, ingevolge (5.30)

$$5.38) \quad \xi^z = \delta_z^{\alpha} F^z(\xi^{1'} - \xi_0^{1'}, \frac{\xi^{p'} - \xi_0^{p'}}{\xi_0^{p'}})$$

maar wie garandeert dat  $\xi^z$  ook de oplossing van het oorspronkelijke gegeven Mayer systeem is. We hebben immers op ongeoorloofde wijze teruggetransformeerd wat zich dan ook wrekt dat in (5.32) juist  $\xi^{1'} - \xi_0^{1'}$  in de noemer voorkomt. Dat zou alleen niet hinderen indien in  $F^z$  de  $\xi^{p'}$

alleen zouden voorkomen in de combinatie  $\xi^{1'} \xi^{p'}$ , immers dan zou er uit  $F^z$  een ordelijke functie van de  $\xi^\alpha$  kunnen ontstaan. Men ziet dan ook daaraan dat de transformatie van  $\xi^\alpha$  in  $\xi^{1'}, \xi^{p'}, \xi^z$  niet ordelijk is maar die van  $\xi^\alpha$  in de variabelen  $\xi^{1'}, \xi^{p'}, \xi^z$  wel. Nu kunnen we eenvoudig bewijzen dat inderdaad deze gunstige omstandigheid optreedt. Immers het gegeven Mayer systeem heeft zekere principale oplossingen t.o.v.  $\xi^\alpha = \xi_0^\alpha$ . Zijn deze

$$5.39) \quad \xi^z = \phi^z(\xi^{1'}, \xi^{p'}) ; \quad \xi^{p'} = \phi^{p'}(\xi^{1'}, \xi^{p'})$$

dan kunnen we deze transformeren in

$$5.40) \quad \xi^z = \delta_z^{\alpha} \phi^z(\xi_0^{1'} + \xi^{1'}, \xi_0^{p'} + \delta_{p'}^{\beta} \xi^{1'} \xi^{p'})$$

en dit zijn principale oplossingen t.o.v.  $\xi^{\alpha'} = \xi^{\alpha'}$  van het getransformeerde systeem (5.31). Nu heeft (5.31) echter slechts één stel principale oplossingen t.o.v.  $\xi^{\alpha'} = \xi^{\alpha'}$  en uit een vergelijking van (5.32) en (5.34) volgt dus, dat de  $\xi^{\alpha'}$  in  $F^{\xi}$  alleen voorkomen in de verbindingen  $\xi^{\alpha'} \xi^{\beta'}$ .

Het is onfraai dat in detransformatie van Lie (5.30) de variabele  $\xi^1$  wordt bevoorrecht. Mayer geeft een fraaiere transformatie waarbij echter overgegaan wordt tot  $n+1$  overtallige coördinaten  $\eta^0, \eta^k$ :

$$5.41) \quad \begin{aligned} \xi^{\alpha} &= \xi^{\alpha} + \eta^0 \eta^{\alpha} ; \alpha = 1, \dots, p ; \xi = p+1, \dots, n. \\ \xi^{\xi} &= \eta^{\xi} \end{aligned}$$

De bewijzen verlopen voor deze coördinaten op overeenkomstige wijze.

## 6. Het covariante vectorveld of de Pfaff'sche vorm.

Heeft men een enkel vectorveld  $w_{\lambda}$  dan kan men daaruit de rotatie vormen

$$6.1) \quad w_{\mu\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} 2 \partial_{[\mu} w_{\lambda]}$$

Op dezelfde wijze kan men, als een  $p$ -vectorveld  $w_{\lambda_1, \dots, \lambda_p}$  gegeven is de rotatie vormen gedefinieerd door

$$6.2) \quad w_{\mu\lambda_1, \dots, \lambda_p} = (p+1) \partial_{[\mu} w_{\lambda_1, \dots, \lambda_p]}$$

Verkorte notaties zijn

$$6.3) \quad w = \text{Rot } w = (p+1) \mathbb{I} w.$$

Men kan door eenvoudig uitschrijven bewijzen dat Rot Rot steeds nul oplevert.

Beschouwen nu bij het veld  $w_{\lambda}$  de volgende stelsels van lineaire totale differentiaalvergelijkingen

$$6.4) \quad \begin{aligned} S) \quad w_{\mu} d\xi^{\mu} &= 0. & \mu\text{-rang} \\ S_1) \quad w_{\mu\lambda} d\xi^{\mu} &= 0. & 2p = \text{rotatie klasse} \\ S_2) \quad w_{\mu} d\xi^{\mu} &= 0, \quad w_{\mu\lambda} d\xi^{\mu} = 0. & K = \text{klasse} \\ S_3) \quad w_{\mu\lambda} w_{\nu\lambda} d\xi^{\mu} &= 0 \text{ of } w_{\mu\lambda} d\xi^{\mu} = c_3 w_{\lambda} & \\ S_4) \quad w_{\mu} d\xi^{\mu} &= 0, \quad w_{\mu\lambda} d\xi^{\mu} = 0. & k = \text{gelijkvormigheidsklasse} \end{aligned}$$

De invariant  $k$  ontleent zijn naam aan het feit dat  $S_4$  invariant is bij de gelijkvormigheidstransformaties  $w_{\lambda} \rightarrow \sigma w_{\lambda}$ . Men ziet gemakkelijk in dat  $C = 1$  of  $C = 0$  en dat

$$6.5) \quad \begin{aligned} n &\geq K \geq k \\ \vee'' &\quad \vee'' \\ 2p &\geq C_3 \geq 0 \end{aligned}$$

De volgende beschouwingen hebben betrekking op een "gebied van constante klasse", dat is een gebied waar al deze arithmetische invarianten constant zijn.

Om de geadjungeerde systemen behorende bij (6.4) te bepalen vormen we de rij

$$6.6) \quad w_\lambda \quad W_{\mu\lambda} \quad w_{[\nu} W_{\mu\lambda]} \quad W_{[\mu} W_{\lambda\nu]} \quad w_{[\nu} W_{\mu\lambda} W_{\lambda\nu]} \quad \text{ens.}$$

of kort symbolisch

$$6.7) \quad \overset{1}{J} = w; \quad \overset{2}{J} = W; \quad \overset{3}{J} = wW; \quad \overset{4}{J} = WW; \quad \overset{5}{J} = wWW; \quad \text{ens.}$$

Dan is in elk geval

$$6.8) \quad \overset{2\sigma}{J} \begin{cases} = 0 & \text{voor } \sigma > p \\ \neq 0 & \text{voor } \sigma \leq p \end{cases}$$

Verder is

$$6.9) \quad \overset{2\sigma}{J} = 2 \overset{2\sigma-1}{J}$$

en daaruit volgt alvast dat  $\overset{2p-1}{J} \neq 0$ . Nu moeten we twee gevallen onderscheiden:

I.  $w_\lambda$  ligt niet in het  $\lambda$ -gebied van  $\overset{2p+1}{J}$ . Dit is echter hetzelfde als het gebied van  $\overset{2}{J}$ , waaruit volgt dat  $\overset{2p+1}{J} = w \overset{2}{J} \neq 0$  is en  $K = 2p+1$ .

In § 2 zagen we dat bij het systeem

$$6.10) \quad C_\mu^x d\xi^\mu = 0; \quad x = p+1, \dots, n.$$

behoort het geadjungeerde systeem

$$6.11) \quad B_\sigma^\mu \partial_\mu f = 0; \quad \sigma = 1, \dots, p.$$

met

$$6.12) \quad B_\sigma^\mu C_\mu^x = 0$$

Nu is (6.11) equivalent met

$$6.13) \quad B_{[\mu_1}^{\mu_1} \dots B_{\mu_p]}^{\mu_p} \partial_{\mu_1} f = 0.$$

of ook

$$6.14) \quad C_{[\mu_{p+1}}^{\mu_{p+1}} \dots C_{\mu_n]}^{\mu_n} \partial_{\mu_{p+1}} f = 0.$$

en evenzo is (6.10) equivalent met

$$6.15) \quad C_{[\mu_{p+1}}^{\mu_{p+1}} \dots C_{\mu_n]}^{\mu_n} d\xi^{\mu_n} = 0.$$

of ook

$$6.16) \quad B_1^{[\mu_1} \dots B_p^{\mu_p} d\xi^{\mu_p]} = 0.$$

Het gebied van  $\overset{2p}{J}$  wordt opgespannen door  $2p$  covariante vectoren en bepaalt een  $\mathcal{E}_{n-2p}$  die men de drager van dat gebied noemt.  $S_j$  drukt u' dat  $d\xi^k$  in die  $\mathcal{E}_{n-2p}$  ligt.

Bijgevolg is  $S_1$  gelijkwaardig met

$$6.17) \quad \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_{2p}} d\xi^{\lambda_1} = 0$$

Passen wij dit toe op het systeem  $S_1$  dan volgt dat het geadjungeerde systeem  $S_1'$  is:

$$6.18) \quad S_1' \quad \boxed{\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_{2p}} \bar{f} = 0}$$

(symbolisch voor  $\sum_{[\mu_1, \dots, \mu_{2p}, \mu]} \bar{f} = 0$ .)

Evenzo is  $S_2$  gelijkwaardig met

$$\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_{2p+1}} d\xi^{\lambda_1} = 0$$

en het geadjungeerde systeem  $S_2'$  is dus

$$6.19) \quad S_2' \quad \boxed{\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_{2p+1}} \bar{f} = 0}$$

(voor  $K = 2p + 1$ )

Aangezien  $w_\lambda$  niet in het gebied van  $W_{\mu\lambda}$  ligt hebben  $W_{\mu\lambda}$  en  $W_{\mu\lambda} w_\nu$  hetzelfde  $\mu$ -gebied, zodat  $S_1 = S_3$  en  $S_2 = S_4$ . Bijgevolg is in dit geval  $C_3 = 2p$  en  $K = 2p + 1 = K$ .

II.  $w_\lambda$  ligt in het gebied van  $J$ . Dan is  $S_1 = S_2$ . Verder is  $W_{\mu\lambda}$  te ontbinden in

$$6.20) \quad W_{\mu\lambda} = 2u_\mu w_\lambda + {}^*W_{\mu\lambda}$$

waarin  ${}^*W_{\mu\lambda}$  van de rang  $2p - 2$  is en de gebieden van  $2u_\mu w_\lambda$  en  ${}^*W_{\mu\lambda}$  geen vector gemeen hebben. Uit (6.20) volgt

$$6.21) \quad J = wW \dots W = w {}^*W \dots {}^*W \quad ({}^*W \neq 0, \text{ } 2p-1 \text{ factoren})$$

en dus is het gebied van  $J$  hetzelfde als het gebied van het stelsel  $w, {}^*W$ . Nu volgt uit  $S_3$

$$6.22) \quad W_{\mu\lambda} w_\nu d\xi^\mu = 0$$

en (6.20) dat

$$6.23) \quad \{-w_\mu u_\nu w_\nu + {}^*W_{\mu\lambda} w_\nu\} d\xi^\mu = 0.$$

Vermenigvuldiging met  $u_w$  geeft

$$6.24) \quad {}^*W_{\mu\lambda} w_\nu u_w d\xi^\mu = 0.$$

maar wegens het buiten elkaar liggen van de gebieden van  ${}^*W_{\mu\lambda}$  en  $u_\mu u_\lambda$  kan dit alleen als  ${}^*W_{\mu\lambda} d\xi^\mu = 0$ . Bijgevolg is  $S_3$  equivalent met

$$6.25) \quad {}^*W_{\mu\lambda} d\xi^\mu = 0.$$

$$w_\mu d\xi^\mu = 0.$$

en dat wil zeggen dat het gebied van  $W_{\mu\lambda} w_\nu$  samenvalt met het gebied van  $J$ . Het geadjungeerde  $S_3'$  is dus

$$6.26) \quad S_3' \quad \boxed{\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_{2p-1}} \bar{f} = 0} \quad (\text{voor } K = 2p)$$

Verder blijkt dat  $S_3 = S_4$  en  $S'_3 = S'_4$  zodat  $K = C_3 = 2\rho - 1$ . Hier is een overzicht:

$$6.27 \text{ I)} \quad \begin{cases} S_3 = S_1 : W_{\mu\lambda} d\xi^\mu = 0 \\ S'_3 = S'_1 : \mathcal{Y} \overline{\mathcal{Y}} = 0 \\ C_3 = 2\rho \end{cases} \quad \begin{matrix} \mathcal{Y} \neq 0 ; \mathcal{Y} \neq 0 \\ \mathcal{Y} \neq 0 \end{matrix} \quad \begin{cases} S_4 = S_2 : \{W_{\mu\lambda} d\xi^\mu = 0 \\ S'_4 = S'_2 : \mathcal{Y} \overline{\mathcal{Y}} = 0. \\ \mathcal{Y} = 0 \end{cases} \quad k = K = 2\rho + 1$$

$$6.27 \text{ II)} \quad \begin{cases} S_2 = S_1 : W_{\mu\lambda} d\xi^\mu = 0 \\ S'_2 = S'_1 : \mathcal{Y} \overline{\mathcal{Y}} = 0 \\ K = 2\rho \end{cases} \quad \begin{matrix} \mathcal{Y} \neq 0 ; \mathcal{Y} = 0. \\ \mathcal{Y} = 0 \end{matrix} \quad \begin{cases} S_4 = S_3 : W_{\mu\lambda} d\xi^\mu = 0. \\ S'_4 = S'_3 : \mathcal{Y} \overline{\mathcal{Y}} = 0. \end{cases} \quad k = C_3 = 2\rho - 1.$$

De belangrijkste stelling is nu, dat  $S_1, S_2, S_3$  en  $S_4$  steeds volledige systemen zijn. Voor een stelsel  $B_{\mu}^{\lambda} = 0$  hadden we in § 2 als n.e.v. voorwaarde voor volledigheid gevonden

$$6.28) \quad B_{[\mu} B_{\lambda]} \partial_{\mu} C_{\lambda]} = 0 ; \mu, \lambda = 1, \dots, p ; \alpha = p+1, \dots, n$$

en hieruit kan men nu gemakkelijk een andere vorm van de n.e.v. voorwaarden afleiden:

$$6.29) \quad W_{[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q]} \partial_{\mu_1} W_{\mu_2 \dots \mu_q]} = 0 ; q = n - p.$$

waarin

$$6.30) \quad W_{\lambda_1 \dots \lambda_q} = C_{[\lambda_1} \dots C_{\lambda_q]}$$

Hieruit volgt dat volledigheid zeker optreedt als  $W_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$  rotatievrij is. De multivectoren  $\mathcal{Y}$  en  $\overline{\mathcal{Y}}$  zijn nu enkelvoudig en beide rotatievrij en daarmee is de volledigheid van  $S_1$  en van  $S_2$  voor het geval I al bewezen. Voor het geval II is  $\mathcal{Y}$  enkelvoudig en zijn rotatie is  $\overline{\mathcal{Y}}$  zodat hier ook (6.28) geldt. De volledigheid van  $\overline{\mathcal{Y}}$  wil zeggen dat de  $E_{n-2\rho}$  van deze  $2\rho$ -vector  $X_{n-2\rho}$ -vormend is. Er bestaan dus  $\infty^{2\rho} X_{n-2\rho}$ 's, de rotatiedragers van het veld  $W_{\lambda}$ . Evenzo behoren bij  $S'_2 \propto X_{n-2\rho}$ 's, de dragers van het veld  $W_{\lambda}$  en bij  $S'_4 \propto X_{n-k}$ 's de characteristieken van het veld  $W_{\lambda}$ , waartussen het volgende verband bestaat:

$$6.31) \quad \begin{array}{ll} \text{I)} & k = K = 2\rho + 1 \quad \text{char.} = \text{dragers} \quad ( \text{rotatiedragers} \\ \text{II)} & k = 2\rho - 1, K = 2\rho \quad \text{char.} ) \text{ dragers} = \text{rotatiedragers} \end{array}$$

## 7. Klasseverlaging bij doorsnijdingen.

is een  $q$ -vector  $W_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$  gegeven en een  $X_m$

$$7.1) \quad \xi^k = \xi^k(\eta^a) ; a = 1, \dots, m.$$

dan is

$$7.2) \quad w_{\beta_1, \dots, \beta_q} = B_{\beta_1}^{\lambda_1} \dots B_{\beta_q}^{\lambda_q} w_{\lambda_1, \dots, \lambda_q}; \quad B_{\beta}^{\lambda} \stackrel{\text{def.}}{=} \partial_{\beta} \xi^{\lambda};$$

de doorsnede van  $w_{\lambda_1, \dots, \lambda_q}$  met de  $X_m$ . deze doorsnede is een  $q$ -vector en dus steeds nul als  $q > m$ . Nu geldt de stelling:

Rotatie van de doorsnede = doorsnede van de rotatie.

inderdaad is

$$7.3) \quad \partial_{[\beta_1} w_{\beta_2, \dots, \beta_q]} = (\partial_{\beta_1} B_{\beta_2}^{\lambda_2} \dots B_{\beta_q}^{\lambda_q}) w_{\lambda_2, \dots, \lambda_q} + B_{\beta_1}^{\lambda_1} \dots B_{\beta_q}^{\lambda_q} \partial_{[\lambda_1} w_{\lambda_2, \dots, \lambda_q]}$$

en de eerste term rechts is nul omdat  $\partial_{[\beta_1} B_{\beta_2]}^{\lambda_2} = 0$ .

Stel nu dat  $X_m$  als volgt gegeven is

$$7.4) \quad f^{m+1}(\xi^k) = c^{m+1}; \dots; f^n(\xi^k) = c^n.$$

dan stellen deze vergelijkingen bij veranderlijke waarden der  $\xi$ 's een stel van  $\infty^{n-m} X_m$ 's voor. Kiest men nu de coördinaten zo dat

$$7.5) \quad \xi^{m+1} = f^{m+1}; \dots; \xi^n = f^n.$$

dat de  $X_m$ 's de coördinaten  $X_m$ 's van dit coördinatenstelsel in elk der  $X_m$ 's kan men  $\xi^1, \dots, \xi^m$  als coördinaten gebruiken. Wordt dit gedaan dan treden dus  $\xi^1, \dots, \xi^m$  in de plaats van  $\eta^1, \dots, \eta^m$  en de doorsnede wordt nu

$$7.6) \quad w_{\beta_1, \dots, \beta_q} = B_{\beta_1}^{\lambda_1} \dots B_{\beta_q}^{\lambda_q} w_{\lambda_1, \dots, \lambda_q} = w_{\beta_1, \dots, \beta_q}(\xi^1, \dots, \xi^m, c^{m+1}, \dots, c^n)$$

Dus geldt het recept:

Om de doorsnede van  $w_{\lambda_1, \dots, \lambda_q}$  te verkrijgen laat men eerst alle termen vallen die een of meer der (nieuwe) maatvectoren  $e_{\lambda_1}^{m+1}, \dots, e_{\lambda_q}^n$  bevatten en in de overblijvende als functies van  $\xi^1, \dots, \xi^m$  beschouwd vervangt men  $\xi^{m+1}, \dots, \xi^n$  door de constanten  $c^{m+1}, \dots, c^n$ .

Wordt van een vector  $w_{\lambda}$  van de klasse  $K$  de doorsnede met  $X_m$  gevormd dan ontstaat aldus een vector  $w_{\beta}$  van een klasse  $K'$  in  $X_m$ . Het verschil  $k = K - K'$  heet de index van het functiesysteem  $f^{m+1}, \dots, f^n$  t.o.v.  $w_{\lambda}$ . Om  $K'$  te berekenen hebben we nodig  $w$ , de rotatie  $w^*$  en de uit  $w$  en  $w^*$  te berekenen rij der  $y$ 's. Haar  $w$  is de doorsnede van  $w$ ,  $w^*$  de doorsnede van  $w^*$  en dus iedere  $y$  de doorsnede van de overeenkomstige  $y$ . Om dus zulk een  $y$  te berekenen laten we uit de overeenkomstige  $y$  alle termen met  $e_{\lambda_1}^{m+1}, \dots, e_{\lambda_q}^n$  vallen en vervangen in de overige  $\xi^{m+1}, \dots, \xi^n$  door  $c^{m+1}, \dots, c^n$ . Let men nu op dat  $e_{\lambda}^{m+1} = \partial_{\lambda} f^{m+1}$  enz., dan volgt dat  $y$  dan en alleen dan nul is wanneer

$$7.7) \quad \partial_{[\lambda_1} \dots \partial_{\lambda_{n+1}} f^{m+1} \dots \partial_{\lambda_n]} f^n = 0.$$

Neem eerst het geval  $m = n-1$ , dus slechts één functie  $f$ . Dan is dus  $y = 0$  alleen indien  $f = 0$ . Er zijn de volgende gevallen

I  $K$  oneven)

a)  $\mathcal{G} \neq 0$ , dus  $\mathcal{G} \neq 0$

$\mathcal{G}$  geen opl. van  $S_2' = S_4'$  en dus geen opl. van  $S_1' = S_3'$

7.8)

b)  $\mathcal{G} = 0$  maar  $\mathcal{G} \neq 0$

$\mathcal{G}$  een opl. van  $S_2' = S_4'$  maar geen opl. van  $S_1' = S_3'$

c)  $\mathcal{G} = 0$ , omdat  $\mathcal{G} = 0$

$\mathcal{G}$  een opl. van  $S_1' = S_3'$  en dus een opl. van  $S_2' = S_4'$   
 $K = K-2$ ;  $K \geq 2$  (zie echter later)

II  $K$  even)

a)  $\mathcal{G} \neq 0$ , dus  $\mathcal{G} \neq 0$

$\mathcal{G}$  geen opl. van  $S_1' = S_2'$  en dus geen opl. van  $S_3' = S_4'$

$K = K$ ;  $K \geq 0$

7.9)

b)  $\mathcal{G} = 0$ , maar  $\mathcal{G} \neq 0$

$\mathcal{G}$  een opl. van  $S_1' = S_2'$  maar geen opl. van  $S_3' = S_4'$

$K = K-1$ ;  $K \geq 1$

c)  $\mathcal{G} = 0$ , omdat  $\mathcal{G} = 0$

$\mathcal{G}$  een opl. van  $S_3' = S_4'$  en dus een opl. van  $S_1' = S_2'$   
 $K \leq K-2$ ;  $K \geq 2$  (zie echter later)

We gaan nu bewijzen dat in alle gevallen  $K \geq K-2$  is, indien  $\mathcal{G}$  een oplossing van  $S_2'$  is. Neem het coördinatenstelsel zo dat  $\xi^n = \mathcal{G}$ , dan is dus  $\xi^n$  een oplossing van  $S_2'$  en  $\xi^n = \text{const.}$  een integraal van  $S_2$ . Bijgevolg neemt  $S_2$  de vorm aan

$$d\xi^n = 0 \quad \leftarrow$$

7.10)  $S_2) \quad \begin{cases} w_\beta d\xi^\beta = 0 \\ w_{\beta 2} d\xi^\beta = 0 \\ w_{\beta n} d\xi^\beta = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \beta = 1, \dots, n-1$

Dit zijn de vergelijkingen van  $S_2$  horende bij de doorsnede  $w_\beta$ ;

We weten nu dat  $S_2$  volledig is, dus dit moeten precies  $2p+1$  onafhankelijke vergelijkingen zijn. Laat men twee met pijl aangeduide, die zeker onafhankelijk zijn weg dan moeten er dus een aantal  $\geq 2p-1$  onafhankelijke overblijven. Bijgevolg is  $K \geq 2p-1$  d.w.z.  $K \geq K-2$ . Hieruit volgt dus dat in de gevallen Ie en IIe juist  $K = K-2$  en  $K = 2$ .

Samenvattend hebben we dus nu verkregen

7.11)  $\begin{aligned} K=0 & \text{ als } \mathcal{G} \text{ geen opl. is van } S_2' \text{ en dus ook niet van } S_3' \\ K=1 & \text{ als } \mathcal{G} \text{ een opl. is van } S_2' \text{ maar niet van } S_3' \\ K=2 & \text{ als } \mathcal{G} \text{ een opl. is van } S_3' \text{ en dus van } S_2'. \end{aligned}$

Een functie met index 0 behoeft slechts aan ongelijkheden te voldoen en kan dus zonder integratie bepaald worden. Voor een functie met index 1 is integratie van  $S'_2$  nodig, dat is van een volledig systeem van  $n-K$  vergelijkingen. Dat kost in het algemeen een operatie  $O_K$ . Evenzo is voor een functie met index 2 integratie van  $S'_3$  nodig dus in het algemeen een  $O_{K-1}$ . Maar er zijn uitzonderingen. Is  $K=1$  dan is  $f = \int w_{\lambda} d\lambda$  een functie met index 1 en kunnen we dus met een  $O_0$  uit. Is  $K=2$  dan kunnen we met een  $O_1$  een functie  $S$  met index 2 bepalen. Dan is  $w_{\lambda} d\lambda S = 0$  en dus is  $w_{\lambda}$  van de vorm  $w_{\lambda} = Z d_{\lambda} S$ .  $S$  gevonden zijnde kan  $Z$  zonder integratie bepaald worden en  $Z$  heeft dan index 1. We hebben dus de volgende kosten-tabel voor één enkele functie

|       |         |                                                                |
|-------|---------|----------------------------------------------------------------|
|       | index 0 | geen integraties, bestaat alleen voor $K < n$                  |
|       | index 1 | $O_K$ voor $K > 2$<br>$O_1$ voor $K = 2$<br>$O_0$ voor $K = 1$ |
| 7.12) | index 2 | $O_{K-1}$                                                      |

Zijn er meerdere functies  $f, \dots, f$ , dan is de index t.o.v.  $w_{\lambda}$  zeker  $\leq 2(n-m)$  omdat de doorsnijding na elkaar uit kan voeren en iedere functie ten hoogste een klasseverlaging 2 kan geven. Is inderdaad  $K=2(n-m)$  dan heet het functiesysteem geconjugueerd t.o.v.  $w_{\lambda}$ . Elke functie moet dan index 2 hebben. Om een geconjugueerd functiesysteem te bepalen zodat men dus eerst een oplossing van  $S'_2$ :

7.13)  $G' f = 0$

Dit kost een  $O_{K-1}$ . Stel  $f^{m+1}$  is die oplossing, zoek dan een  $f$  die tezamen met  $f^{m+1}$  met 4 verlaagt:

7.14)  $G' f^{m+1} f = 0$

Maar dit is equivalent met een  $S'_3$ -vergelijking in de  $X_{n-1} f^{m+1} = \text{constant}$ . Dus kan zeker met een operatie  $O_{K-3}$  worden opgelost. Noem die oplossing  $f^{m+2}$  en ga zo door. In totaal zijn de operaties

7.15)  $O_{K-1}, O_{K-3}, \dots, O_{K-2(n-m)+1}$

nodig om één geconjugueerd functiesysteem vast te leggen.

Indien  $K=2(n-m)-1$  dan heet het functiesysteem semigeconjugueerd. Elke functie moet dan of index 1 of index 2 hebben anders kwamen we niet uit. Men kan dus beginnen met een functie van index 1, dat kost oplossing van  $S'_2$ :

7.16)  $G' f = 0$

dus een  $O_K$ . Noem deze  $f^{m+1}$ . De verdere verlagen alle telkens met 2. Los dus eerst op  $G' f^{m+1} f = 0$ .

7.17)  $G' f^{m+1} f = 0$   
enz. In totaal is er nodig

$$7.18) \quad Q_k, Q_{k-1}, \dots, Q_{k+2-(n-m)}$$

Maar het kan ook anders. Verlaag eerst  $n-m-1$  maal met 2, dat geeft

$$Q_{k-1}, Q_{k-2}, \dots, Q_{k+2-2(n-m)}$$

$$7.19) \quad Q_{k-1}, Q_{k-2}, \dots, Q_{k+2-2(n-m)}$$

en de klasse is nu gedaald tot  $k-2(n-m-1)$ . Nu willen we nog één verder naar beneden en dus moet  $f$  een oplossing zijn van

$$7.20) \quad \mathcal{D}^{k-2(n-m-1)} f = 0$$

die zich afspeelt in de  $X_{n-1}$  met de vergelijkingen

$$f = \text{const}; \dots; f = \text{const}.$$

Voor die oplossing is nu nog nodig een

$$7.21) \quad \begin{array}{ll} Q_{k+2-2(n-m)} & \text{voor } k > 2(n-m) \\ Q_1 & \text{,, } k = 2(n-m) \\ Q_0 & \text{,, } k = 2(n-m) - 1 \end{array}$$

## 8. Het theorema der Klasseverlaging

Wij bewijzen het theorema

Opdat bij een gegeven veld  $\mathcal{D}_\lambda$  van klasse  $k$  juist een systeem van  $S$  functies kan worden gevonden met index  $k$  is noodzakelijk en voldoende dat

$$8.1) \quad \begin{array}{l} 0 \leq k \leq K \\ 2S \geq k \\ K-k \leq n-S \end{array}$$

De noodzakelijkheid der voorwaarden is triviaal. Het bewijs van de onvoldoendheid wordt geleverd door inderdaad  $S$  functies te construeren. Wij doen dat dan zo dat er zoveel mogelijk functies zonder integraties bepaald worden en bepalen tegelijk voor de anderen de ten hoogste nodige operaties.

Willekeurige functies bepalen een systeem van  $X_{n-u}$  en de doorsneden van deze met  $\mathcal{D}_\lambda$  hebben zeker een klasse  $\leq n-u$ . Is nu  $n-u \leq k$  maak dan dat deze klasse  $n-u$  wordt.

Daarvoor is n.e.v. dat

$$8.2) \quad \mathcal{D}^{\sigma} f \dots f \quad \left\{ \begin{array}{ll} = 0 & \text{voor } \sigma > n-u \\ \neq 0 & \text{voor } \sigma \leq n-u \end{array} \right.$$

en hier blijven alleen de ongelijkheden omdat een alternerend product van meer dan  $n$  factoren altijd 0 is. Is  $n-u > k$  maak dan dat de klasse van de doorsneden precies  $k$  is. Daarvoor is n.e.v. dat

$$8.3) \quad \mathcal{D}^{\sigma} f \dots f \quad \left\{ \begin{array}{ll} = 0 & \text{voor } \sigma > k \\ \neq 0 & \text{voor } \sigma \leq k \end{array} \right.$$

maar ook hier valt de gelijkheid weg, omdat  $\bar{y} = 0$  voor  $\sigma > K$ . De functies hoeven dus alleen maar aan ongelijkheden te voldoen en kosten geen integraties. Ga door met het eerste geval. De klasse is nu  $n-u$  in een  $X_{n-u}$  en deze moet gereduceerd worden tot  $K-k$ . Dat kan altijd met behulp van

$$8.4) \quad \frac{1}{2}(n-u-K+k+\eta) \quad \eta=0 \text{ of } 1$$

functies en het totaal aantal functies is  $S$ , dus

$$8.5) \quad u + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}\eta = S$$

of

$$8.6) \quad u = 2S + K - k - n - \eta$$

Nu willen we het aantal  $u$  maximaal hebben en kiezen dus  $\eta=0$ . Dan is

$$8.7) \quad u = 2S + K - k - n$$

en omdat hier  $n-u \leq K$  is

$$8.8) \quad \boxed{2K - 2n + 2S \geq k}$$

Nu het tweede geval. Hier blijft de klasse eerst  $K$  in een  $X_{n-u}$ . Dan zijn er nog nodig  $\frac{1}{2}k$  of  $\frac{1}{2}(k+1)$  functies die de klasse op  $K-k$  brengen. Het totaal aantal functies is dus

$$8.9) \quad S = \begin{cases} u + \frac{1}{2}k & (k \text{ even}) \\ u + \frac{1}{2}(k+1) & (k \text{ oneven}) \end{cases}$$

dus

$$8.10) \quad u = \begin{cases} S - \frac{1}{2}k & (k \text{ even}) \\ S - \frac{1}{2}(k+1) & (k \text{ oneven}) \end{cases}$$

en aangezien  $n-u \geq K$  is hebben we nu

$$8.11) \quad \boxed{2K - 2n + 2S \leq k+1}$$

Dus, recapitulerend:

Voor  $2K - 2n + 2S \geq k$   
Bepaal eerst  $u = 2S + K - k - n$  functies zonder integratie, die de klasse brengen op

$$n-u = 2n - 2S - K + k$$

Bepaal daarna nog  $n-S+k-K$  functies die de klasse op  $K-k$  brengen. Hiervoor nodig de opera-

ties  $O_{2n-2S-K+k-1}, O_{2n-2S-K+k-3}, \dots, O_{K-k+1}$

Voor  $2K - 2n + 2S \leq k+1$   
Bepaal eerst  $S - \frac{1}{2}k$  of  $S - \frac{1}{2}(k+1)$  functies zonder integratie die de klasse onveranderd laten en daarna  $\frac{1}{2}k$  of  $\frac{1}{2}(k+1)$  functies die de klasse op  $K-k$  brengen. Dit kost:

keven:  $O_{K-1}, O_{K-3}, \dots, O_{K-k+1}$

koneven:  $\begin{cases} K > k+1 : O_{K-1}, O_{K-3}, \dots, O_{K-k+2}, O_{K-k+1} \\ K = k+1 : O_{K-1}, O_{K-3}, \dots, O_1 \\ K = k : O_{K-1}, O_{K-3}, \dots, O_0 \end{cases}$

# § 9. Kanonische vormen van $\omega_\lambda$ en $\omega_\lambda d\xi^\lambda$

Zij  $2p + \varepsilon$  de klasse van  $\omega_\lambda$  en  $\xi^1, \dots, \xi^p$  een systeem van  $p$  functies met index  $2p$ . Kies de  $\xi^k$  dan zo, dat  $\xi^1, \dots, \xi^p, \xi^{p+1}, \dots, \xi^n$  onafhankelijk zijn.  $\omega_\lambda d\xi^\lambda$  kan dan als volgt worden uitgeschreven

$$9.1) \quad \omega_\lambda d\xi^\lambda = u^1 ds^1 + \dots + u^p ds^p + u^{p+1} d\xi^{p+1} + \dots + u^n d\xi^n$$

waarin  $u^1, \dots, u^n$  functies van  $\xi^1, \dots, \xi^p, \xi^{p+1}, \dots, \xi^n$  zijn. Daar de index  $2p$  is ontstaat uit (9.1) een vorm van de klasse  $\varepsilon$  indien  $\xi^1, \dots, \xi^p$  door constanten worden vervangen. Bijgevolg is voor  $\varepsilon = 1$

$$9.2) \quad u^{p+1} d\xi^{p+1} + \dots + u^n d\xi^n$$

een volledige differentiaal indien in deze uitdrukking  $\xi^1, \dots, \xi^p$  als parameters worden beschouwd. Er bestaat dus een scalar  $h(\xi^k)$  zo dat

$$9.3) \quad u^{p+1} d\xi^{p+1} + \dots + u^n d\xi^n = dh - \frac{\partial h}{\partial \xi^1} ds^1 - \dots - \frac{\partial h}{\partial \xi^p} ds^p$$

Uit (9.1) en (9.3) volgt echter dat  $\omega_\lambda d\xi^\lambda$  kan worden geschreven

$$9.4) \quad \omega_\lambda d\xi^\lambda = dh + z^1 ds^1 + \dots + z^p ds^p$$

Op dezelfde wijze wordt bewezen, dat voor  $\varepsilon = 0$  een vorm bestaat

$$9.5) \quad \omega_\lambda d\xi^\lambda = z^1 ds^1 + \dots + z^p ds^p$$

Men noemt (9.4) en (9.5) kanonische vormen van  $\omega_\lambda d\xi^\lambda$ . Het is interessant voor kanonische vormen de vergelijkingen der dragers, rotatiedragers en karakteristieken te kennen:

$$9.6) \quad \begin{cases} K=2p+1 \left\{ \begin{array}{l} \text{char.}=\text{draggers:} \\ (X_{n-k} = X_{n-K}) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} p = \text{const.}; \\ \xi^1 = \text{const.}; \dots; \xi^p = \text{const.} \\ z^1 = \text{const.}; \dots; z^p = \text{const.} \\ \xi^{p+1} = \text{const.}; \dots; \xi^n = \text{const.} \\ z^{p+1} = \text{const.}; \dots; z^n = \text{const.} \end{array} \right. \\ \text{rotatiedraggers:} \\ (X_{n-2p}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} K=2p \left\{ \begin{array}{l} \text{char.} (X_{n-k}) \\ \text{draggers}=\text{rotatiedraggers} \\ (X_{n-K} = X_{n-2p}) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \xi^1 = \text{const.}; \dots; \xi^p = \text{const.} \\ z^1 = \text{const.}; \dots; z^p = \text{const.} \\ z^1 : z^2 : \dots : z^p = \text{const.} \end{array} \right.$$

In de kanonische vormen verschijnt  $\omega_\lambda$  als een veld van de klasse  $K$  in de  $X_K$  van de variabelen  $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p, z^1, z^2, \dots, z^p$  dat ontstaat wanneer de  $X_n$  wordt samengelegd naar het normaalprobleem  $X_{n-K}$  met de vergelijkingen

$$9.7) \quad \xi^1 = \text{const.}; \xi^2 = \text{const.}; \dots; \xi^p = \text{const.}; z^1 = \text{const.}; \dots; z^p = \text{const.}$$

Dit zijn precies de dragers van  $\omega_\lambda$

Voor  $\varepsilon = 1$  is

$$9.8) \quad \overset{2p}{y} \lambda_1, \dots, \lambda_{2p} = 2^p \overset{1}{z} [\lambda_1, s_{\lambda_2}, \dots, \overset{p}{z}_{\lambda_{2p-1}}, \overset{p}{s}_{\lambda_{2p}}]$$

$$\overset{2p+1}{y} \lambda_1, \dots, \lambda_{2p+1} = 2^p \overset{1}{z} [\lambda_1, s_{\lambda_2}, \dots, \overset{p}{z}_{\lambda_{2p-1}}, \overset{p}{s}_{\lambda_{2p}}, \mu_{\lambda_{2p+1}}]$$

en daaruit volgt dat voor  $K$  even een veld in den kanonische vorm nergens een punt van verminderde klasse heeft waar die vorm geldt.

Een veld van even klasse in de kanonische vorm heeft echter punten van verminderde klasse gegeven door

$$9.9) \quad \overset{1}{z} = 0, \dots, \overset{p}{z} = 0$$

In die punten is  $c=0$ ,  $K=2p$ ,  $c_3=0, k=0$

Heeft men twee velden  $\omega_\lambda$  en  $\omega_\lambda$  die in de punten  $\xi^k$  en  $\xi^k$  niet van verminderde klasse en van dezelfde klasse  $K_1$  zijn, dan kan men twee coördinatenstelsels  $\xi^k$  en  $\xi^k$  invoeren, zo dat  $\omega_\lambda$  in een  $\mathcal{O}(\xi^k)$  in de coördinaten  $\xi^k$  en  $\omega_\lambda$  in een  $\mathcal{O}(\xi^k)$  in de coördinaten  $\xi^k$  den kanonische vorm heeft waarin de eerste  $K$  coördinaten voorkomen en de andere ontbreken. De velden hebben nu elk op hun eigen coördinatenstelsysteem en in hun eigen gebied precies dezelfde vorm en kunnen dus zonder meer op elkaar worden afgebeeld. Men zegt dat zij isomorph zijn. Twee covariante vectorvelden zijn dus dan en alleen dan in de omgevingen van twee gewone punten isomorph indien zij van dezelfde klasse zijn. Een enkel veld is autoisomorph in ieder gebied van constante klasse. Men make zich duidelijk dat bijv. een scalarveld nooit autoisomorph kan zijn wanneer het niet constant is.

## § 10. Eigenschappen der functies $\mu, s$ en $z$ ; $\alpha = 1, \dots, p$

Wanneer kan een functie van  $\xi^k$  de rol van een veld  $\mu$  spelen voor  $K$  oneven? Daarvoor is n.e.v. dat

$$10.1) \quad \overset{\text{diff}}{\omega_\lambda} = \omega_\lambda - \partial_\lambda \mu$$

een veld van de klasse  $2p$  is. Nu is echter

$$10.2) \quad \overset{2p+1}{y} = \overset{2p+1}{y} - \overset{2p}{y} \bar{\mu}$$

en dus is n.e.v. dat  $\mu$  een oplossing is van het niet homogene lineaire partiele systeem van differentiaalvergelijkingen

$$10.3) \quad \boxed{\overset{2p+1}{y} - \overset{2p}{y} \bar{\mu} = 0}$$

Uit (10.3) volgt

$$10.4) \quad \overset{2p+1}{y} \bar{\mu} = 0; \overset{2p}{y} \bar{\mu} \neq 0$$

en  $\mu$  moet dus een oplossing van  $S'_2 = S'_4$  zijn die niet tevens oplossing van  $S'_1 = S'_3$  is. Maar deze beide voorwaarden zijn niet voldoende.

Brengt men  $\omega_\lambda$  in de kanonische vorm

$$10.5) \quad \omega_\lambda = e_\lambda^1 + \xi^2 e_\lambda^2 + \dots + \xi^{2pK} e_\lambda^{2pK}$$

dan neemt (10.3) de vorm aan

$$10.6) \quad e_{[\lambda_1, \dots, \lambda_K]}^1 - \left( \partial_{[\lambda_1, \mu]} \right)^2 e_{\lambda_2, \dots, \lambda_K}^K > 0$$

en dit is equivalent met

$$10.7) \quad \partial_1 \mu = 1; \quad \partial_\omega \mu = 0; \quad \omega = K+1, \dots, n$$

Bijgevolg is (10.6) of ook (10.3) een volledig niet homogeen systeem met de algemene oplossing

$$10.8) \quad \mu = \xi^1 + \phi(\xi^2, \dots, \xi^K)$$

bevattende de willekeurige functie  $\phi$ . Is  $p$  geen oplossing van (10.3) dan is de klasse van  $\omega_\lambda$  gelijk aan  $2p+1$ .

Wanneer kan een functie van  $\xi^K$  de rol van een veld  $S^\alpha$  of  $z^\alpha$  spelen voor  $K$  oneven? Het is duidelijk, dat iedere  $S^\alpha$  is een functie van index 2, dus een oplossing van  $S'_1 = S'_3$ . Ook volgt uit de afleiding van de kanonische vorm dat iedere oplossing de rol van een  $S^\alpha$  kan spelen.

Nu is

$$10.9) \quad d\mu + z^\alpha dS^\alpha = d(\mu + z^\alpha S^\alpha) - S^\alpha dz^\alpha$$

en daaruit volgt dat  $S^\alpha$  en  $z^\alpha$  verwisselbaar zijn. Voor de functies  $z^\alpha$  geldt dus dezelfde eigenschap.

Stel nu dat  $K$  even is. Dan volgt op dezelfde manier dat voor de functies  $S^\alpha$  alleen oplossingen van  $S'_2 = S'_4$  d.w.z. functies van index 2 in aanmerking komen. Maar de  $S^\alpha$  en  $z^\alpha$  zijn nu niet meer verwisselbaar. Voor enige functie van het soort  $z^\alpha$  is n.e.v. dat

$$10.10) \quad \omega_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} z^{-1} \omega_\lambda$$

van de klasse  $2p-1$  is. Nu is

$$10.11) \quad \begin{aligned} \omega_\lambda^{2p} &= z^{-p} \omega_\lambda^{2p} - 2pz^{-p-1} \bar{z} \omega_\lambda^{2p-1} \\ \omega_\lambda^{2p-1} &= z^{-p} \omega_\lambda^{2p-1} \neq 0 \end{aligned}$$

en dus is n.e.v. dat  $z^\alpha$  een oplossing is van het stelsel niet homogene lineaire partiële differentiaalvergelijkingen

$$10.12) \quad \boxed{\omega_\lambda^{2p} - 2pz^{-p-1} \bar{z} \omega_\lambda^{2p-1} = 0}$$

$$\text{Uit (10.12) volgt: } \omega_\lambda^{2p} \bar{z} = 0$$

$$10.13) \quad \omega_\lambda^{2p-1} \bar{z} \neq 0$$

Dus moet  $\alpha$  een oplossing zijn van  $S'_1 = S'_2$  die geen oplossing is van  $S'_3 = S'_4$ , d.w.z.  $\alpha$  moet een functie met index 1 zijn. Maar dit is niet voldoende. Wordt  $w_\lambda$  in de kanonische vorm geschreven

$$10.14) \quad w_\lambda = \xi^1 e_\lambda + \dots + \xi^{K-1} e_\lambda$$

dan volgt na enig omrekenen dat (10.12) equivalent is met

$$10.15) \quad 1 - \alpha' (\xi^1 \partial_1 + \dots + \xi^{K-1} \partial_{K-1}) = 0$$

$$\partial_\omega \alpha = 0 \quad ; \quad \omega = K+1, \dots, n$$

Hieruit volgt, dat iedere functie van  $\xi^1, \dots, \xi^K$  die homogeen is van de graad 1 in  $\xi^1, \xi^3, \dots, \xi^{K-1}$  een oplossing van (10.12) is en omgekeerd. Is  $\alpha$  geen oplossing van (10.12) dan is de klasse van  $w_\lambda$  gelijk aan 2 $\rho$ .

Samenvatting:

$$\begin{cases} K \text{ oneven} & \left\{ \begin{array}{l} \uparrow : \text{functie met index 1 die een oplossing is van het niet} \\ \text{homogene stelsel (10.3);} \\ S \text{ en } \alpha : \text{functies met index 2;} \end{array} \right. \\ K \text{ even} & \left\{ \begin{array}{l} S : \text{functie met index 2;} \\ \alpha : \text{functie met index 1 die een oplossing is van het niet} \\ \text{homogene stelsel (10.12)} \end{array} \right. \end{cases}$$

Heeft men eenmaal een kanonische vorm dan kan men gemakkelijk een stelsel van  $S$  functies met index  $k$  zonder integratie vinden, mits aan de condities (8.1) is voldaan.

Is  $K < n$  dan zijn er behalve  $\varepsilon \uparrow, S, \alpha$ ;  $\alpha = 1, \dots, \rho$  nog  $n-K$  onafhankelijke functies, noem deze overtallige functies.

Kies nu voor

$k$  even:  $\frac{1}{2}k$  van de  $S^\alpha$  en  $S - \frac{1}{2}k$  uit de tot deze  $S^\alpha$  behorende  $\alpha$  en uit de overtallige functies

$k$  oneven:  $\frac{1}{2}(k-1)$  van de  $S^\alpha$ ;  $S - \frac{1}{2}(k+1)$  uit de  $S^\alpha$  behorende tot deze  $\alpha$  en uit de overtallige functies;  
de functie  $\uparrow$  voor  $K$  oneven en een der  $S^\alpha$  die niet tot de gekozen  $\alpha$  behoort voor  $K$  even.

## § 11. Gelijkvormigheidstransformaties en gradienttransformaties.

Bij de gelijkvormigheidstransformatie

$$11.1) \quad w'_\lambda = \sigma w_\lambda$$

is voor iedere waarde van  $\nu$

$$11.2) \quad y'^{\nu} = \sigma^\nu y^\nu + 2\nu \sigma^{\nu-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} y^\nu$$

$$11.3) \quad y'^{2\nu+1} = \sigma^{2\nu+1} y^{2\nu+1}$$

-12-51

20-12  
27-12  
3-1  
10-1 } geen oplossing - 29 -

Dus zijn  $k$  en de karakteristieken invariant. (Volgt ook uit de invariantie van  $S_4$ )

Geval I:  $K = 2p+1$

$$11.4) \quad \begin{aligned} {}^{2p+1}y &\neq 0 \\ {}^{2p+2}y &= (2p+2)\sigma^p \bar{\sigma} y \\ {}^{2p+3}y &= 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} &\neq 0 \text{ voor } \sigma \text{ index } 0 \\ &= 0 \text{ voor } \sigma \text{ index } 1 \text{ of } 2 \end{aligned} \right.$$

Voor  $K = n$  is de index van  $\sigma$  nooit nul. Dus:

$$11.5) \quad K = 2p+1 \quad \left\{ \begin{aligned} K &= K+1 \text{ voor } \sigma \text{ index } 0 \quad (\text{nooit voor } K=n) \\ K &= K-1 \text{ voor } \sigma \text{ index } 1 \text{ of } 2 \quad (\text{altijd voor } K=n) \end{aligned} \right.$$

Geval II:  $K = 2p$

$$11.6) \quad \begin{aligned} {}^{2p+1}y &= 0 \\ {}^{2p}y &= \sigma^p (y + 2p\sigma^{-1}\bar{\sigma} y) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} &\neq 0 \text{ indien } \sigma \text{ geen oplossing is van (10.12)} \\ &= 0 \text{ indien dit wel het geval is.} \end{aligned} \right.$$

Dus:

$$11.7) \quad K = 2p \quad \left\{ \begin{aligned} K &= K && \text{indien } \sigma \text{ geen oplossing van (10.12) is} \\ K &= K-1 = k && \text{indien } \sigma \text{ een oplossing van (10.12) is.} \end{aligned} \right.$$

Door een gelijkvormigheidstransformatie kan de klasse dus altijd tot  $k$  worden verminderd maar niet verder. Hieruit volgt dat  $k$  het minimum aantal variabelen is waarin zich de vergelijking  $w_\lambda d\xi^\lambda = 0$  laat schrijven

Bij de gra dienttransformatie

$$11.8) \quad w_\lambda = w_\lambda + \partial_\lambda u$$

is voor iedere waarde van  $2v$ :

$$11.9) \quad {}^{2v}y = y$$

$$11.10) \quad {}^{2v+1}y = y + \bar{u} y$$

Dus zijn  $2p$  en de rotatiedragers invariant (Volgt ook uit de invariantie van  $S_1$ )

Geval I:  $K = 2p+1$

$$11.11) \quad \begin{aligned} {}^{2p}y &\neq 0 \\ {}^{2p+1}y &= y + \bar{u} y \\ {}^{2p+2}y &= 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} &\neq 0 \text{ indien } \checkmark \text{ geen oplossing is van (10.3)} \\ &= 0 \text{ indien dit wel het geval is} \end{aligned} \right.$$

Dus:

$$11.12) \quad K = 2p+1 \quad \left\{ \begin{aligned} K &= K && \text{indien } \sigma \text{ geen opl. van (10.3) is} \\ K &= K-1 && \text{indien } \sigma \text{ een opl. van (10.3) is.} \end{aligned} \right.$$

Geval II:  $\mathcal{P} = 2\rho$

$$11.13) \quad \begin{matrix} \mathcal{Y} \neq 0 \\ \mathcal{Y} = \frac{1}{2} \mathcal{Y} \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} \neq 0 \text{ voor } \sigma \text{ index } 0 \text{ (nooit voor } \mathcal{P}=n) \\ = 0 \text{ voor } \sigma \text{ index } 1 \text{ of } 2 \text{ (altijd voor } \mathcal{P}=n) \end{cases}$$

Dus

$$11.14) \quad \mathcal{Y} = 2\rho \begin{cases} \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \text{ voor } \sigma \text{ index } 0 \text{ (nooit voor } \mathcal{P}=n), \\ \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_2 \text{ voor } \sigma \text{ index } 1 \text{ of } 2 \text{ (altijd voor } \mathcal{P}=n) \end{cases}$$

## § 12. Het inwendige probleem voor $q = n - \rho = 1$

Gegeven een  $\mathcal{E}_{n-1}$ -veld door de vergelijking

$$12.1) \quad w_\lambda d\xi^\lambda = 0$$

waarin  $w_\lambda$  een veld is van de klasse  $\mathcal{Y}$ . Men zoekt de omhulde  $X_m^s$  voor de maximale waarde van  $m$ . De doorsnede van  $w_\lambda$  met een dergelijke  $X_m$  is nul. Het probleem is dus equivalent met de constructie van alle stelsels van  $n-m$  functies met index  $\mathcal{Y}$ . Nu gaan de condities (8.1) voor  $k = \mathcal{Y}$ ,  $S = n-m$  over in

$$(12.2) \quad 2(n-m) \geq \mathcal{Y} = 2\rho + \varepsilon$$

en daaruit volgt voor de maximale waarde  $\nu$  van  $m$

$$(12.3) \quad \nu = n - \rho - \varepsilon = n - \mathcal{Y} + \rho$$

Om nu een dergelijk stel van  $\rho + \varepsilon$  functies werkelijk te bepalen, indien  $w_\lambda$  in de kanonische vorm

$$12.4) \quad w_\lambda = \varepsilon \partial_\lambda x^0 + \rho_i \partial_\lambda x^i; \quad i = 1, \dots, \rho; \quad \varepsilon = 1 \text{ of } 0$$

gegeven is, passen we de regels toe van § 10 en vinden de  $\rho + \varepsilon$  vergelijkingen

$$12.5) \quad \varepsilon x^0 = \text{const}; \quad x^k = \text{const}; \quad k = 1, \dots, \rho$$

Vergelijken we dit stelsel met de vergelijkingen der dragers, rotatiedragers en karakteristieken, die hier de vorm aannemen (verg. § 9):

$$12.6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{draggers:} & \varepsilon x^0 = \text{const.}; \quad x^k = \text{const.}; \quad \rho_i = \text{const.}; \\ (X_{n-\rho}) & \\ \text{rotatie-} & \\ \text{draggers} & x^k = \text{const.}; \quad \rho_i = \text{const.}; \quad k, i = 1, \dots, \rho \\ (X_{n-2\rho}) & \\ \text{characteris-} & \varepsilon x^0 = \text{const.}; \quad x^k = \text{const.}; \\ \text{tieken:} & \varepsilon \rho_i = \text{const.}; \quad \rho_1 : \rho_2 : \dots : \rho_\rho = \text{const.} \\ X_{n-\rho} & \end{array} \right.$$

dan zien wij dat iedere omhulde  $X_{n-\rho-\varepsilon}$  bestaat uit:

$$12.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{voor } \varepsilon = 0 : \infty^\rho \text{ draggers (=rotatiedragers) en } \infty^{\rho-1} \text{ karakteris-} \\ \text{tieken.} \\ \text{voor } \varepsilon = 1 : \infty^\rho \text{ draggers (=karakteristieken)} \end{array} \right.$$

Uitgaande van verschillende kanonische vormen vindt men op deze wijze verschillende stelsels van omhulde  $X_v$ 's. Bijv.

$$12.8) \quad w_\lambda = e_\lambda + \xi^2 e_\lambda = \partial_\lambda (\xi' + \xi^2 \xi^3) - \xi^3 e_\lambda$$

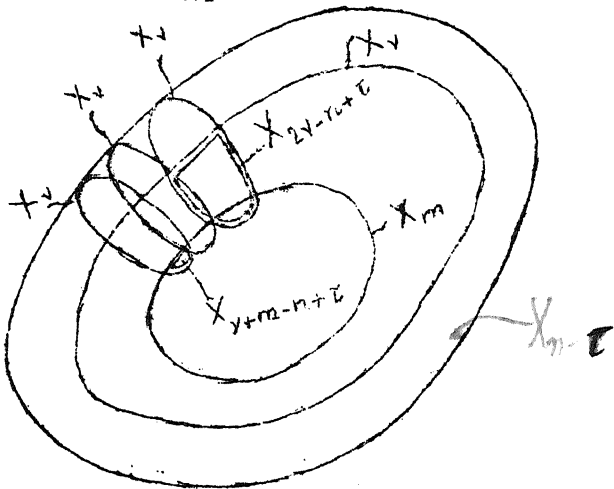
We gaan nu bewijzen dat men alle omhulde  $X_m$ 's;  $m \leq v$  kan bepalen zonder integratie indien men over één kanonische vorm beschikt. Zij

$$12.9) \quad w_\lambda = \varepsilon \partial_\lambda x^0 + \rho_i \partial_\lambda x^i; \quad \varepsilon = 0 \text{ of } 1; \quad i = 1, \dots, \rho$$

de kanonische vorm. Het bijbehorende stelsel van  $X_v$ 's omhulde,  $v = n - \rho - \varepsilon$ , is

$$12.10) \quad \varepsilon x^0 = \text{const.}; \quad x^i = \text{const.}$$

Noem dit stelsel  $\mathcal{N}$ . Door elk punt van het beschouwde gebied gaat er één. Neem nu een willekeurige omhulde  $X_m$ . Dan gaat er door elk punt van  $X_m$  (in het beschouwde gebied) één  $X_v$  van  $\mathcal{N}$ . Deze  $X_v$  heeft met  $X_m$  een  $X_{v+m-n+\tau}$ ;  $1 \leq \tau \leq n-v$ ;  $n-v-m \leq \tau \leq n-m$ , gemeen en dus bepaalt de  $X_m$  met al deze  $\infty$ -snijdende  $X_v$ 's juist een  $X_{n-\tau}$ .



Het hele geval degenereert voor  $\tau = n-v$ , dit is het uitzonderingsgeval waarbij de  $X_m$  juist in een der  $X_v$ 's van  $\mathcal{N}$  ligt. Laten wij dat geval bijzijde dan bewijzen:

in  $X_{n-\tau}$  ligt één en slechts een omhulde  $X_v$ , die  $X_m$  bevat en deze behoort niet tot  $\mathcal{N}$ .

Zijnde vergelijkingen van  $X_m$

$$12.11) \quad \mathcal{H}^\alpha(\varepsilon x^0, x^i, \rho_i, \xi^{2\rho+\varepsilon+1}, \dots, \xi^n) = 0 \quad \alpha = m+1, \dots, n$$

dan is de rang van dit stelsel  $n-m$ . De rang ten opzichte van  $\rho_i, \xi^{2\rho+\varepsilon+1}, \dots, \xi^n$  moet minder dan  $n-m$  zijn anders zouden  $n-m$  dezer variabelen uit (12.11) kunnen worden opgelost en deze oplossingen gesubstitueerd in (12.9) moesten 0 geven. Voor  $\varepsilon = 1$  kan dit zeker niet,  $\partial_\lambda x^0$  kan immers niet nul gemaakt worden. Voor  $\varepsilon = 0$  zou het stelsel (12.11) equivalent zijn met  $\rho$  vergelijkingen  $\rho_i = 0$  en nog  $n-m-\rho$  verdere vergelijkingen. Dat zou met zich brengen dat het beschouwde gebied zou liggen in het gebied van verminderde klasse (verg. (9.9)) hetgeen we uitgesloten hebben. Dus is de rang van (12.11) t.o.v.  $\rho_i, \xi^{2\rho+\varepsilon+1}, \dots, \xi^n$  gelijk  $n-m-\tau'$ ,  $\tau' \geq 1$ , en daaruit volgt, dat uit (12.11) juist  $\tau'$  vergelijkingen kunnen worden ageleid, die  $\rho_i, \xi^{2\rho+\varepsilon+1}, \dots, \xi^n$  niet bevatten (eliminatiethorema).

(12.11) neemt dus de vorm aan

$$12.12) \quad \begin{aligned} a) \quad & f^a(\varepsilon x^0, x^k) = 0 & ; \quad a = 1, \dots, \tau; \quad x = \tau+1, \dots, n-m \\ & & i, k = 1, \dots, p \\ b) \quad & f^x(\varepsilon x^0, x^k, \rho_i, \xi^{2p+\varepsilon+1}, \dots, \xi^n) = 0 \end{aligned}$$

en daarbij moet de rang van (12.12b) t.o.v.  $\rho_i, \xi^{2p+\varepsilon+1}, \dots, \xi^n$  juist gelijk  $n-m-\tau$  zijn (in de nulpunten). De doorsnede van de  $X_m$  met de vergelijkingen (12.12) en de  $X_v$ 's (12.10) verkrijgt men door in (12.12) de  $x^0, x^k$  te vervangen door constanten. In elk dezer  $X_v$ 's kunnen  $\rho_i, \xi^{2p+\varepsilon+1}, \dots, \xi^n$  als coördinaten worden gebruikt en (12.12b) stelt dus precies in elke  $X_v$  een  $X_{v-n+m+\tau}$  voor. Dat wil dus zeggen dat  $\tau = \tau'$  en dat hetzelfde getal dat geometrisch de lagging der  $X_m$  t.o.v. de snijdende  $X_v$ 's van  $N$  aangaf, algebraïsch het hoogste aantal vergelijkingen in  $x^0, x^k$  aangeeft dat uit (12.11) kan worden afgeleid.

De  $\tau$  vergelijkingen (12.12a) stellen de  $X_{n-\tau}$  voor die alle  $X_v$ 's van  $N$  bevat die ten minste een punt met  $X_m$  gemeen hebben. We moeten dus bewijzen dat deze  $\tau$  vergelijkingen op één en slechts één manier kunnen worden gecompleteerd tot  $n-v$  vergelijkingen, die niet in strijd zijn met (12.12b) en  $w, d\xi^\lambda$  nul maken.

Aangezien de  $X_m$  (12.12) omhuld is, is

$$12.13) \quad \varepsilon dx^0 + \rho_i dx^i = 0$$

een gevolg van (12.12) en

$$12.14) \quad d\xi^\mu \partial_\mu f^a = 0; \quad d\xi^\mu \partial_\mu f^x = 0; \quad a = 1, \dots, \tau; \quad x = \tau+1, \dots, n-m$$

of in andere vorm

$$12.15) \quad \begin{aligned} \varepsilon dx^0 \frac{\partial f^a}{\partial x^0} + dx^k \frac{\partial f^a}{\partial x^k} &= 0; & k, i = 1, \dots, p, \quad n = 2p + \varepsilon + 1, \dots, n. \\ \varepsilon dx^0 \frac{\partial f^x}{\partial x^0} + dx^k \frac{\partial f^x}{\partial x^k} + d\rho_i \frac{\partial f^x}{\partial \rho_i} + d\xi^\omega \frac{\partial f^x}{\partial \xi^\omega} &= 0; \end{aligned}$$

Bijgevolg moeten er coëfficiënten  $\phi_a, \phi_x$  bestaan zodat

$$12.16) \quad \begin{aligned} a) \quad \varepsilon &= \varepsilon \phi_a \frac{\partial f^a}{\partial x^0} + \varepsilon \phi_x \frac{\partial f^x}{\partial x^0} & 0 &= \phi_x \frac{\partial f^x}{\partial \rho_i} \\ \rho_i &= \phi_a \frac{\partial f^a}{\partial x^i} + \phi_x \frac{\partial f^x}{\partial x^i} & b) \quad 0 &= \phi_x \frac{\partial f^x}{\partial \xi^\omega} \end{aligned}$$

geldt ingevolge (12.12). Indien de  $\phi_x$  niet alle nul waren zou (12.16b) uitdrukken dat de rang van het stelsel der  $f^x$  t.o.v. de  $\rho_i, \xi^\omega$  kleiner ware dan  $n-m-\tau$ . Aangezien deze rang echter precies  $n-m-\tau$  is moet  $\phi_x = 0$  zijn en is (12.16) equivalent met

$$12.17) \quad a) \quad \varepsilon = \varepsilon \phi_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^0}$$

$$b) \quad \rho_i = \phi_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \quad \begin{matrix} \alpha = 1, \dots, \tilde{z} \\ i = 1, \dots, \rho \end{matrix}$$

en dit stelsel moet nu gelden als gevolg van (12.12).

Voor  $\varepsilon = 1$  volgt uit (12.17) dat tenminste één der  $f^\alpha$  werkelijk  $x^0$  bevat. De rang van het stelsel  $f^\alpha$  is  $\tilde{z}$  en men kan dus altijd (12.17a) met  $\tilde{z}$ - $\varepsilon$  vergelijkingen uit (12.17b) combineren tot een stelsel van  $\tilde{z}$  onafhankelijke vergelijkingen, lineair in de  $\phi_\alpha$ . Uit deze kunnen de  $\phi_\alpha$  worden opgelost. Substitutie in de andere  $\rho + \varepsilon - \tilde{z}$  vergelijkingen geeft een stelsel van  $\rho + \varepsilon - \tilde{z}$  vergelijkingen in  $x^0, x^i, \rho_i$  dat moet gelden als gevolg van (12.12). Samen met (12.12a) vormen deze vergelijkingen een stelsel van  $\rho + \varepsilon = n - \nu$  vergelijkingen dat de gezochte  $X_\nu$  voorstelt.

De constructie van een willekeurige omhulde  $X_m$  is daarmede teruggebracht tot de constructie van de meest algemene omhulde  $X_\nu$ . Om die meest algemene omhulde  $X_\nu$  te vinden hebben we dus het volgende te doen:

Regel I voor de constructie van de meest algemene omhulde  $X_\nu$

- 1) Bepaal een canonische vorm (12.9) van  $\omega$ ;
- 2) Kies en getal  $\tilde{z}$ , en  $\leq n - \nu$ ;
- 3) Kies  $\tilde{z}$  willekeurige vergelijkingen (12.12a) in  $\varepsilon x^0$  en  $x^i$  met analytische functies  $f^\alpha$  en zo dat  $\varepsilon x^0$  en  $\tilde{z} - \varepsilon$  der  $x^k$  kunnen worden opgelost;
- 4) Schrijf de vergelijkingen (12.17) op;
- 5) Elimineer de  $\phi_\alpha$  uit (12.17) en voeg de overige vergelijkingen (12.17) na substitutie van de  $\phi_\alpha$  bij (12.12a). Dit geeft de  $n - \nu$  vergelijkingen van de  $X_\nu$ .

De meest algemene  $X_\nu$  hangt dus af van  $\tilde{z}$  willekeurige functies. De meest algemene  $X_m$  wordt verkregen door  $\nu - m$  willekeurige onafhankelijke vergelijkingen toe te voegen.

Uit (12.12a) kunnen  $\varepsilon x^0$  en  $\tilde{z} - \varepsilon$  der  $x^k$  worden opgelost

$$12.18) \quad a) \quad \varepsilon x^0 = \varepsilon \omega^0(x^i) \\ b) \quad x^{\alpha} = \omega^\alpha(x^i) \quad \begin{matrix} \alpha = 1, \dots, \tilde{z} - \varepsilon \\ i = \tilde{z} - \varepsilon + 1, \dots, \rho \end{matrix}$$

en diensgevolge neemt (12.17) de vorm aan (schrijf nu  $\phi_\alpha$  in plaats van  $\phi_\alpha$ )

$$12.19) \quad a) \quad \varepsilon = \varepsilon \phi_0 \\ b) \quad \rho_\alpha = \phi_\alpha \\ c) \quad \rho_\alpha = -\varepsilon \frac{\partial \omega^0}{\partial x^\alpha} - \rho_\alpha \frac{\partial \omega^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

Het voorschrift luidde: elimineer de  $\varphi_\alpha$  uit (12.19) en voeg de overige vergelijkingen bij (12.18). De vergelijkingen van de  $X_\nu$  zijn dus (12.18) samen met (12.19c), of ook, indien men invoert:

$$12.20) \quad W \stackrel{\text{def}}{=} -\varepsilon \omega^0(x^k) - \rho_\alpha \omega^\alpha(x^k)$$

$$\alpha = 1, \dots, \ell - \varepsilon$$

$$\ell = 1 - \varepsilon + 1, \dots, \rho$$

in andere vorm

$$12.21) \quad \begin{aligned} \varepsilon x^0 &= -W / \rho_\alpha x^\alpha \\ x^\alpha &= -\frac{\partial W}{\partial \rho_\alpha} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \rho_\alpha} \rho_\alpha = + \frac{\partial W}{\partial x^k} x^k$$

Men kan bewijzen dat (12.21) altijd een omhulde  $X_\nu$  voorstelt ook wanneer  $W$

voor  $\varepsilon = 1$  een willekeurige functie van  $\rho_\alpha, x^k$  is  
 voor  $\varepsilon = 0$  een functie van  $\rho_\alpha, x^k$ , homogeen v.d. graad 1 in de  $\rho_\alpha$  is.

Dus:

Regel II voor de constructie van de meest algemene omhulde  $X_\nu$ :

- 1) Bepaal een canonische vorm (12.9) voor  $W$ ;
- 2) Kies een getal  $\varepsilon \geq 1$  en  $\varepsilon \leq \rho + \varepsilon$
- 3) Kies een functie van  $\rho_1, \dots, \rho_{\ell-\varepsilon}, x^{1-\varepsilon+1}, \dots, x^\rho$ , analytisch en voor  $\varepsilon = 0$  homogeen v.d. graad 1 in  $\rho_1, \dots, \rho_{\ell-\varepsilon}$ .
- 4) De vergelijkingen (12.21) stellen de meest algemene omhulde  $X_\nu$  voor. Men kan zelfs iedere  $X_\nu$  schrijven wanneer men  $W$  lineair in  $\rho_1, \dots, \rho_{\ell-\varepsilon}$  kiest.

De meest algemene  $X_m$  wordt weer verkregen door  $\nu - m$  vergelijkingen toe te voegen.

### § 13. Andere geometrische interpretatie (in een $X_{n+\varepsilon}$ ).

Tot nu toe werkten we in de  $X_n$  van

$$13.1) \quad \varepsilon x^0, x^k, \rho_i, \xi^{2\rho+\varepsilon+1}, \dots, \xi^n$$

Alle speelt zich echter eigenlijk af in de  $X_{2\rho+\varepsilon}$  van  $x^0, x^k, \rho_i$  die uit  $X_n$  ontstaat door samenlegging der  $X_n$  naar de dragers (dit zijn  $X_{n-2\rho-\varepsilon}$ 's) van  $\omega_j$ . Laat dus voortaan  $\xi^{2\rho+\varepsilon+1}, \dots, \xi^n$  weg of, wat hetzelfde is, neem  $n = 2\rho + \varepsilon$ .

Nu veranderen we de notatie en schrijven

$$\begin{array}{llll}
 n & \text{in plaats van } p & & \\
 \xi^0 & " & " & x^0 \\
 \xi^k & " & " & x^k \\
 13.2) & \omega_\lambda & " & p_i \\
 & k, \lambda = 1, \dots, n & " & i, k = 1, \dots, p \\
 & 2n + \varepsilon & " & 2p + \varepsilon
 \end{array}$$

De canonische vorm (12.9) gaat dus nu over in

$$13.3) \quad \varepsilon d\xi^0 + \omega_\lambda d\xi^\lambda$$

Voor  $\varepsilon = 0$  beschouwen we nu de  $\omega_\lambda$  als kentallen van een covarianten vector in de  $X_n$  der  $\xi^k$ . Dan stelt de combinatie  $\xi^k \omega_\lambda$  een vector-element der  $X_n$  voor en de combinatie  $\xi^k / \omega_\lambda$  een element der  $X_n$ .

Dus:

$$\begin{array}{l}
 \text{Punt der } X_{2n} \text{ der } \xi^k \text{ en } \omega_\lambda = \text{Vectorelement der } X_n \text{ der } \xi^k \\
 \text{Kromme } \xi^k, [\omega_\lambda] \text{ in de } X_{2n} = (n-1)\text{-element der } X_n.
 \end{array}$$

Volgens Lie zijn twee vectorelementen  $\xi^k, \omega_\lambda$  en  $\xi^k + d\xi^k, \omega_\lambda + d\omega_\lambda$  en ook de corresponderende  $(n-1)$ -elementen in verenigde ligging als

$$13.4) \quad \omega_\lambda d\xi^\lambda = 0$$

Dit betekent, dat er tenminste één  $X_{n-1}$  bestaat waaraan ze beide raken (slordig: dat punt van de een in  $\mathcal{E}_{n-1}$  van de andere en omgekeerd).

$2n-m$  onafhankelijke vergelijkingen in  $\xi^k, \omega_\lambda$  bepalen een stelsel van  $\infty^m$  vectorelementen of een  $\mathcal{V}_m$ . De  $\mathcal{V}_m$  heet homogeen indien de vergelijkingen homogeen zijn in  $\omega_\lambda$ . Behoort dan  $\xi^k \omega_\lambda$  tot de  $\mathcal{V}_m$  dan ook  $\xi^k, \omega_\lambda$ . In dat geval bepaalt de  $\mathcal{V}_m$  een stelsel van  $\infty^{m-1} \mathcal{E}_{m-1}$ 's of een  $\mathcal{W}_{m-1}$ .

$\mathcal{V}_m$  wordt genoemd  $\mathcal{N}_m$  als alle vectorelementen die naburig zijn in verenigde ligging zijn. Evenzo  $\mathcal{W}_{m-1} \rightarrow \mathcal{M}_{m-1}$ . Voorbeeld: De vectoren in één punt der  $X_n$  vormen een  $\mathcal{V}_n$  die  $\mathcal{N}_n$  is. Evenzo vormen de vectoren rakende aan een  $X_m$  in  $X_n$  een  $\mathcal{N}_m$  en de  $\mathcal{E}_{n-1}$ 's rakende aan de  $X_{m-1}$  een  $\mathcal{M}_{m-1}$ . Deze speciale  $\mathcal{N}_n$  en  $\mathcal{M}_{m-1}$ 's worden genoteerd  $\mathcal{N}_n^m$  en  $\mathcal{M}_{m-1}^m$ . Zij zijn volkomen vastgelegd als de  $X_m$  gegeven is.

Kan men uit de  $2n-m$  vergelijkingen der  $\mathcal{V}_m$  juist  $n-t$  onafhankelijke vergelijkingen afleiden die alleen de  $\xi^k$  bevatten (n.e.v. is dat de rang t.o.van de  $\omega_\lambda$  juist  $n-m+t$  is), dan bepalen deze vergelijkingen een  $X_t$ , het veldd gebied (fieldregion), der  $\mathcal{V}_m$  of  $\mathcal{W}_{m-1}$ .  $t$  heet de velddimensie van de  $\mathcal{V}_m$  of  $\mathcal{W}_{m-1}$ . Men berekent gemakkelijk

$$0 \leq t \leq n$$

$$\begin{array}{ll}
 13.5) & n-m+1 \leq t \leq m \quad \text{voor niet homogeen geval.} \\
 & m-n \leq t \leq m-1 \quad \text{voor homogeen geval.}
 \end{array}$$

Voor ditzelfde geval dus voor  $\varepsilon = 0$  gebruikt men in de  $X_{2n}$  ook graag de coördinaten

$$13.6) \quad X^K \stackrel{\text{def}}{=} \xi^K; \quad X^{(K)} \stackrel{\text{def}}{=} w_K \\ K = (1), \dots, (n)$$

Dan neemt  $w_\lambda d\xi^\lambda$  de vorm aan van een differentiaalvorm in  $X_{2n}$

$$13.7) \quad W_B dX^B; \quad B = 1, \dots, n(1), \dots, (n)$$

waarin  $W_B$  een covariante vector der  $X_{2n}$  is met de kentallen

$$13.8) \quad W_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} w_\lambda; \quad W_{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} 0$$

In deze  $X_{2n}$  stelt iedere  $\mathcal{N}_m$  een  $X_m$  voor. Is de  $\mathcal{N}_m$  een  $N_m$  dan geldt in elk punt dezer  $X_m$  dat  $W_B dX^B = 0$  is. Een  $N_m$  is dus een omhulde  $X_m$ . Van  $W_B$  kennen we de klasse, namelijk  $2n$ . Nu weten we dat de maximale waarde van  $n$  juist  $n$  is (verg. (12.3)). Daaruit volgt dat er geen  $N'_m$ 's met  $m > n$  bestaan!

We gaan nu de resultaten van § 12 blz. 29 in  $X_{2n}$  geometrisch duiden in  $X_n$ .

Stel dat de dimensie van een  $N_n$  gelijk  $t$  is. Dan bestaat de  $N_n$  uit  $\infty^{n-t}$  vectorelementen in elk punt van een  $X_t$  en deze moeten alle aan de  $X_t$  raken. De  $N_n$  is dus de  $N_n^t$  die bij de  $X_t$  behoort. Ga nu uit van de kanonische vorm van  $W_B dX^B$  in  $X_{2n}$

$$13.9) \quad W_B dX^B = W_\lambda dX^\lambda = w_\lambda d\xi^\lambda$$

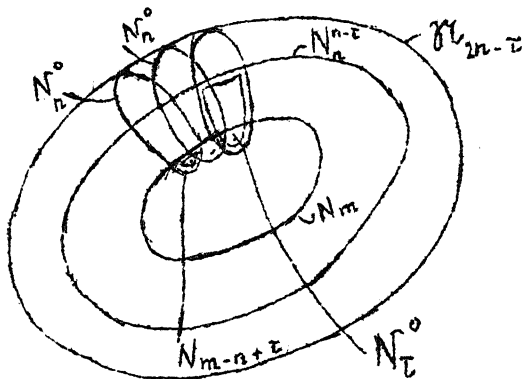
Het bijbehorende stelsel van omhulde  $X_n$ 's is

$$13.10) \quad \xi^K = \text{const.}$$

d.w.z. iedere  $X_n$  stelt de  $N_n^0$  voor die uit de  $\infty^n$  vectorelementen in één punt der  $X_n$  der  $\xi^K$  bestaat.

52 Ga nu uit van een willekeurige omhulde  $X_m$  van het veld  $W_B$  in  $X_{2n}$ . Dan weten we dat uit de  $2n-m$  vergelijkingen juist  $\tilde{\tau}$  vergelijkingen kunnen worden gevormd die alleen de  $\xi^K$  bevatten. Deze stellen in de  $X_n$  der  $\xi^K$  een  $X_{n-\tilde{\tau}}$  voor en de  $X_m$  is het beeld van een  $N_m$  die deze  $X_{n-\tilde{\tau}}$  als gebied heeft en  $n-\tilde{\tau}$  als dimensie. In dezelfde  $X_n$  leggen deze  $\tilde{\tau}$  vergelijkingen een  $\mathcal{N}_{2n-\tilde{\tau}}$  vast die bestaat uit alle vectoren in de punten van de  $X_{n-\tilde{\tau}}$ . Deze  $\mathcal{N}_{2n-\tilde{\tau}}$  bestaat dus uit de  $\infty^{n-\tilde{\tau}} N_n^0$ 's in de punten der  $X_{n-\tilde{\tau}}$ . Bij de  $X_{n-\tilde{\tau}}$  behoort één en slechts één  $N_n^{n-\tilde{\tau}}$  en deze bevat de  $N_m$  omdat de  $\mathcal{N}_m$  de conditie  $W_B dX^B = 0$  vervult.

De figuur op blz. 32 wordt nu :



(men bedenke dat

$$n \rightarrow 2n$$

$$v \rightarrow n$$

en dat dus degeneratie optreedt voor  $z=n$ )

De stelling op blz. 32 is nu vanzelfsprekend geworden.

Voor  $\varepsilon = 1$  beschouwen we  $1, w_1, \dots, w_n$  als componenten van een covarianten vector in de  $X_{n+1}$  van  $\xi^0, \xi^K$  en  $w_1, \dots, w_n$  als kentallen van een  $\mathcal{E}_n$  in de locale  $\mathcal{E}_{n+1}$ . We schrijven

$$13.11) \quad X^0 \stackrel{\text{def}}{=} \xi^0; \quad X^K \stackrel{\text{def}}{=} \xi^K; \quad X^{(K)} \stackrel{\text{def}}{=} w_K$$

$(K) = (1), \dots, (n)$

Dan neemt de Pfaffsche vorm (13.3) de vorm aan

$$13.12) \quad W_B dX^B$$

waarin

$$13.13) \quad W_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1; \quad W_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} w_\lambda; \quad W_{(\lambda)} \stackrel{\text{def}}{=} 0$$

$(\lambda) = (1), \dots, (n)$

In de  $X_{n+1}$  worden nu alleen covariante vectoren beschouwd waarvan het eerste kental nul is. Homogene  $\mathcal{H}_m$ 's komen dus niet voor en er is een eeneenduidige correspondentie tussen de  $\mathcal{H}_m$ 's en de  $\mathcal{M}_m$ 's.

De figuur op blz. 32 kan voor  $\varepsilon = 1$  evenzo aangeduid worden als voor  $\varepsilon = 0$ .

#### § 14. $C_1$ -transformaties.

$C_1$ -transformaties (contact-tr. van de 1e soort) zijn die transformaties  $\varepsilon \xi^0, \xi^K, w_\lambda \rightarrow \varepsilon' \xi'^0, \xi'^K, w'_\lambda$  die  $\varepsilon d\xi^0 + w_\lambda d\xi^\lambda$  invariant laten op een willekeurige scalaire factor na. Is dus

$$14.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon' \xi'^0 &= \varepsilon' \phi^0(\varepsilon \xi^0, \xi^K, w_\lambda) \\ \xi'^K &= \phi^K( \quad \quad \quad ) \\ w'_\lambda &= \psi_\lambda( \quad \quad \quad ) \end{aligned}$$

dan is de eis dat

$$14.2) \quad \sigma'(\varepsilon d\xi'^0 + w'_\lambda d\xi'^\lambda) = \sigma(\varepsilon d\xi^0 + w_\lambda d\xi^\lambda)$$

waarin  $\sigma$  en  $\sigma'$  functies zijn van  $\varepsilon \xi^0, \xi^K, w_\lambda$ , waarvan alleen het quotient

$$14.3) \quad a) \frac{\sigma'}{\sigma} = \Omega(\varepsilon \xi^0, \xi^K, w_\lambda); \quad b) \frac{\sigma'}{\sigma} = \Omega(\varepsilon' \xi'^0, \xi'^K, w'_\lambda)$$

ons werkelijk interesseren. Er zijn 2 duidingen mogelijk:  $\varepsilon \xi^0, \xi^K$  en  $w_\lambda$  kunnen worden beschouwd als

- 1° nieuwe coördinaten voor het vectorelement  $\varepsilon \xi^0, \xi^K, w_\lambda$
- 2° een nieuw vectorelement waarin  $\varepsilon \xi^0, \xi^K, w_\lambda$  overgaat.

Wij nemen hier altijd de tweede interpretatie. Bij een contacttransformatie worden dus de vectorelementen overgevoerd in andere vectorelementen. N.B.: twee elementen behorende bij hetzelfde punt kunnen na de transformatie tot verschillende punten behoren.

Daar (14.2) geldt zijn  $C_1$ -transformaties die transformaties der vectorelementen waarbij "verenigde ligging" invariant is.

Er is nog een andere invariantie.  $\varepsilon \xi^0, \xi^K, w_\lambda$  zijn de coördinaten van een vectorelement in  $X_{n+\varepsilon}$ . Een bepaald vectorveld (met  $\varepsilon w_0 = \varepsilon$ ) is dus gegeven door de vergelijkingen

$$14.4) \quad \begin{aligned} \varepsilon w_0 &= \varepsilon \\ w_\lambda &= f_\lambda(\varepsilon \xi^0, \xi^K) \end{aligned}$$

Laten we op dit veld een  $C_1$ -transformatie toepassen. Voór de transformatie hoorde er bij ieder punt één vectorelement. Na de transformatie hoeft dat niet meer zo te zijn, meerdere elementen kunnen in één punt bij elkaar gekomen zijn. Dan vernietigt de transformatie het karakter van de  $\mathcal{V}_n$  vectorveld te zijn. Blijft het veld vectorveld dan heet de  $C_1$ -transformatie t.o.v. van dit bepaalde veld veld conserverend (field-preserving). N.e.v. voorwaarde is zoals enig gereken leert

$$14.5) \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{array} \left[ \begin{array}{cc} \xleftarrow{1} & \xleftarrow{n} \\ \varepsilon(\partial_0' \phi^0 + (\partial^\mu \phi^0) \partial_\mu f_\mu) & \varepsilon(\partial_\lambda' \phi^0 + (\partial^\mu \phi^0) \partial_\lambda f_\mu) \\ \varepsilon(\partial_0' \phi^K + (\partial^\mu \phi^K) \partial_\mu f_\mu) & \partial_\lambda' \phi^K + (\partial^\mu \phi^K) \partial_\lambda f_\mu \end{array} \right] \neq 0$$

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial \xi^0}; \quad \partial_\lambda = \frac{\partial}{\partial \xi^\lambda}; \quad \partial^K = \frac{\partial}{\partial w_K}$$

Dit is een ongelijkheid, dus "in het algemeen" is een  $C_1$ -transformatie voor enig veld veld-conserverend, maar er zijn uitzonderingsgevallen.

Stel nu dat (14.1) t.o. van enig veld veld-conserverend is. Dan volgt uit (14.2) dat k en de karakteristieken die  $C_1$ -transformatie invariant zijn maar 2° en de rotatiedragers in het algemeen niet.

Het doel is nu de meest algemene  $C_1$ -transformatie te vinden. Men kan het geval  $\varepsilon = 1$  op  $\varepsilon = 0$  terugvoeren. Maar men kan even gemakkelijk algemeen werken. Voor het gemak schrijven we nu  $q_\lambda$  voor  $\sigma w_\lambda$ , en evenzo  $q_\lambda$  voor  $\sigma' w_\lambda$ . Dan nemen de voorwaarden (14.2) de prettige

vorm aan

$$14.5) \quad \varepsilon \sigma d\xi^0 + q_\lambda d\xi^\lambda - \varepsilon \sigma' d\xi^0 - q_\lambda d\xi^\lambda = 0$$

en dat betekent, dat de  $2n + \varepsilon + 1$  vergelijkingen (14.1) en (14.3a) in de  $X_{4n+4\varepsilon}$  der variabelen

$$14.6) \quad \varepsilon \xi^0, \varepsilon' \xi^0, \xi^K, \xi'^K, \varepsilon \sigma, \varepsilon' \sigma, q_\lambda, q'_\lambda$$

een  $X_{2n+3\varepsilon}$  voorstellen die omhuld wordt door het vectorveld behorende bij de differentiaalvorm (14.5).

Om dus de meest algemene  $C_1$ -transformatie te vinden hebben we maar de meest algemene omhulde  $X_{2n+3\varepsilon}$  te bepalen waarvan de vergelijkingen zich naar  $\varepsilon \xi^0, \xi^K, \sigma$  en  $q_\lambda$  (en evenzo naar  $\varepsilon' \xi^0, \xi'^K, \sigma'$  en  $q'_\lambda$ ) laten oplossen.

Daar hebben we nu twee regels voor. Werkende volgens Regel I § 12 (kanonische vorm hebben we al) hebben we  $\tau$  vergelijkingen te kiezen

$$14.7) \quad \tilde{f}^\alpha(\varepsilon \xi^0, \varepsilon' \xi^0, \xi^K, \xi'^K) = 0; \alpha = 1, \dots, \tau \quad \begin{matrix} 1 \leq \tau \leq 2n+2\varepsilon \\ (\leq n+\varepsilon) \end{matrix}$$

en de volgende  $2n+2\varepsilon$  vergelijkingen op te schrijven (we hebben hier het geval van een even klasse en  $\rho$  gaat hier over in  $2n+2\varepsilon$ ):

$$14.8) \quad \begin{aligned} \varepsilon \sigma &= -\varepsilon \chi_\alpha \frac{\partial \tilde{f}^\alpha}{\partial \xi^0} & \varepsilon' \sigma &= -\varepsilon' \chi_\alpha \frac{\partial \tilde{f}^\alpha}{\partial \xi'^0} \\ q_\lambda &= -\chi_\alpha \frac{\partial \tilde{f}^\alpha}{\partial \xi^\lambda} & q'_\lambda &= -\chi_\alpha \frac{\partial \tilde{f}^\alpha}{\partial \xi'^\lambda} \end{aligned}$$

Uit (14.8) elimineert men nu de  $\chi_\alpha$ . Dan blijven er  $2n+2\varepsilon - \tau$  vergelijkingen in de  $4n+4\varepsilon$  variabelen, maar deze zijn homogeen van de eerste graad in  $\varepsilon \sigma, \varepsilon' \sigma, q_\lambda, q'_\lambda$ . Men kan er dus vergelijkingen van maken die behalve  $\varepsilon \xi^0, \varepsilon' \xi^0, \xi^K, \xi'^K$  alleen  $w_\lambda, w'_\lambda$  en  $\sigma/\sigma$  bevatten. Met (14.7) samen hebben we dan  $2n+2\varepsilon$  vergelijkingen in deze variabelen. We doen nu nog het volgende:

Voor  $\varepsilon = 1$ : Elimineer  $\sigma/\sigma$ . Geeft  $2n+1$  vergelijkingen in de variabelen  $\xi^0, \xi'^0, \xi^K, \xi'^K, w_\lambda, w'_\lambda$  en hieruit moeten  $\xi^0, \xi'^0, w_\lambda$  worden opgelost als functies van  $\xi^K, \xi'^K, w'_\lambda$ . Dat dit altijd kan moet nog worden verzekerd.

Voor  $\varepsilon = 0$ : Kies voor  $\sigma/\sigma$  een willekeurige functie, analytisch en  $\neq 0$  in het beschouwde gebied. Dan hebben we  $2n$  vergelijkingen in  $\xi^K, \xi'^K, w_\lambda, w'_\lambda$  waaruit  $\xi^K, w_\lambda$  moeten kunnen worden opgelost.

Om die mogelijkheid van oplossing te waarborgen moet men naar de functionaaldeterminant van het stelsel (14.7,8) kijken met betrekking tot  $\varepsilon \xi^0, \varepsilon' \xi^0, \xi^K, q_\lambda$  en  $\chi_\alpha$ . Dat voert tot de conditie dat de determinant

2-53 (in 1974)

$$\leftarrow \text{AF} \rightarrow \leftarrow n \rightarrow \leftarrow \tau \rightarrow$$

14.9)

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon \frac{\partial f^\alpha}{\partial \xi^0} & -\frac{\partial f^\alpha}{\partial \xi^\lambda} & 0 \\ \varepsilon \chi_\alpha \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial \xi^0 \partial \xi^\mu} & \chi_\alpha \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial \xi^\lambda \partial \xi^\mu} & \frac{\partial f^\alpha}{\partial \xi^\mu} \\ \varepsilon \chi_\alpha \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial \xi^0 \partial \xi^0} & \varepsilon \chi_\alpha \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial \xi^\lambda \partial \xi^0} & \varepsilon \frac{\partial f^\alpha}{\partial \xi^0} \end{array}$$

mythical  
 $\tau \leq n + \varepsilon$   
nulle  
ach  $n = 0$

met  $n + \tau + \varepsilon$  rijen en kolommen niet ingevolge (14.7) nul is.

Het getal  $\tau$  speelt een grote rol. Men noemt  $n + \varepsilon - \tau$  de rang van de  $C_1$ -transformatie. Enig element in een punt  $\xi^\alpha_*$ ,  $\xi^\kappa_*$  wordt getransformeerd in een element welks punt in elk geval op de  $X_{n+\varepsilon-\tau}$  ligt waar van de vergelijkingen zijn

$$14.10) \quad f^\alpha(\xi^\alpha_*, \xi^0, \xi^\kappa_*, \xi^\kappa) = 0 ; \alpha = 1, \dots, \tau$$

Aangezien verenigde elementen verenigd blijven raakt het getransformeerde element aan de  $X_{n+\varepsilon-\tau}$ . De  $N_n^0$  behorende bij  $\xi^\alpha_*$ ,  $\xi^\kappa_*$  gaat dus over in de  $N_n^{n+\varepsilon-\tau}$  met  $X_{n+\varepsilon-\tau}$  als veldgebied. De omgekeerde  $C_1$ -transformatie doet de  $X_{n+\varepsilon-\tau}$  tot een punt samentrekken.

Indien  $n + \varepsilon - \tau = 0$  is gaan alle elementen behorende tot één punt over in elementen die weer tot één punt horen. We hebben dus een punttransformatie en uit deze kan de  $C_1$ -transformatie eenduidig worden afgeleid voor  $\varepsilon \neq 0$  op een scalaire factor na voor  $\varepsilon = 0$ . Dit geval heet de "uitgebreide" (extended, erweitert) punttransformaties.

Zij  $\varepsilon = 0$  en zij

$$14.11) \quad f^\alpha(\xi^\alpha) = 0 ; \alpha = m+1, \dots, n$$

de vergelijking van een  $X_m$  in  $X_n$ . Iedere covariante vector, tangent aan  $X_m$  heeft de vorm

$$14.12) \quad w_\lambda = \sum_{\alpha} \partial_\lambda f^\alpha$$

Pas nu de  $C_1$ -transformatie

$$14.13) \quad \begin{aligned} \xi^\kappa &= \phi^\kappa(\xi^\alpha, w_\lambda) \\ w_\lambda &= \psi_\lambda(\xi^\alpha, w_\lambda) \end{aligned}$$

toe en zij de rang hiervan  $n - \tau$ . Dan gaat ieder punt der  $X_m$  met zijn bijbehorende  $N_n^0$  over in een  $N_n^{n-\tau}$  behorende bij een of andere  $X_{n-\tau}$ . Substitueert men nu (14.12) in (14.13)

$$14.14) \quad \xi^k = \phi^k(\xi, \mathcal{S}_x \partial_\lambda \phi^x); \quad x = m+1, \dots, n$$

en deze vergelijkingen zijn homogeen van de graad nul in de  $\mathcal{S}_x$  omdat de  $\phi^k$  homogeen v.d. graad nul in  $\mathcal{W}_\lambda$  zijn. Uit de  $2n-m$  vergelijkingen (14.11, 14) kan men de  $\xi^k$  en de  $n-m-1$  verhoudingen der  $\mathcal{S}_x$  elimineren.

eliminieren en dan blijft er tenminste één vergelijking in de  $\xi^k$  over, voorstellende een  $X_{n-1}$ . "In het algemeen" gaan dus de elementen van de  $N_n^m$  behorende bij  $X_m$  over in de elementen van de  $N_n^{n-1}$  behorende bij deze  $X_{n-1}$ . Voor  $m = n-1$  volgt dus dat een  $C_1$ -transformatie een  $X_{n-1}$  met zijn  $N_n^{n-1}$  "in het algemeen" overvoert in een andere  $X_{n-1}$  met zijn  $N_n^{n-1}$ . Twee ergens aan elkaar rakende  $X_{n-1}$ 's gaan dus over in rakende  $X_{n-1}$ 's, en dit is de reden waarom de  $C_1$ -transformaties contact-transformaties heten.

We kunnen nu ook de regel II gaan toepassen. Schrijven we voor het gemak  $q_0$  en  $q'_0$  voor  $\xi^0$  en  $\xi'^0$  dan neemt (14.5) den vorm aan

$$14.15) \quad q_\lambda d\xi^\lambda - q'_\lambda d\xi'^\lambda = 0; \quad \lambda = 0, 1, \dots, n$$

Volgens regel II hebben we nu een functie  $V$  van  $\tau$  der  $q_\lambda, q'_\lambda$  en van  $2n + 2\varepsilon - \tau$  der  $\xi^\lambda, \xi'^\lambda$  (met andere indices) in te voeren, homogeen van de graad 1 de  $q$ 's en  $q'$ 's, maar we moeten precies aangeven welke van elk der 4 soorten grootheden voorkomen, dus

$$14.16) \quad V(q_a, q'_a, \xi^x, \xi'^y) \quad (\text{homogeen van de 1e graad in } q, q')$$

$$a = 1 - \varepsilon, \dots, \tau, -\varepsilon; \quad x = \tau, -\varepsilon + 1, \dots, n$$

$$b = 1 - \varepsilon, \dots, \tau_2 - \varepsilon; \quad y = \tau_2 - \varepsilon + 1, \dots, n$$

waarbij men natuurlijk eerst de  $\xi^k$  op willekeurige wijze heeft mogen permuteren en de  $q_\lambda$  op precies dezelfde manier, hetgeen eveneens geldt voor de  $\xi'^k$  en  $q'_\lambda$ . Men krijgt dan de volgende vergelijkingen

$$14.17) \quad \begin{array}{ll} a) \quad \xi^a - \frac{\partial V}{\partial q_a} = 0 & c) \quad q_x + \frac{\partial V}{\partial \xi^x} = 0 \\ b) \quad \xi'^b + \frac{\partial V}{\partial q'_b} = 0 & d) \quad q'_y - \frac{\partial V}{\partial \xi'^y} = 0 \end{array}$$

Dit zijn  $2n + 2\varepsilon$  vergelijkingen, die in de  $X_{4n+4\varepsilon}$  een  $X_{2n+2\varepsilon}$  voorstellen, die door de vector van (14.15) omhuld wordt.  $V$  is homogeen van de graad 1 in  $q_a, q'_a$  en dus zijn (14.17 a,b) homogeen van de nulden en (14.17 c,d) van de eerste graad.

Voor  $\varepsilon = 0$  zijn (14.17)  $2n$  vergelijkingen in  $\xi^k, \sigma w_\lambda, \xi'^k, \sigma' w_\lambda$ . Voer nu voor  $\frac{\sigma}{\sigma'}$  een willekeurige functie in, dan blijven er  $2n$  vergelijkingen in  $\xi^k, w_\lambda, \xi'^k, w_\lambda$ .

Voor  $\varepsilon = 1$  zijn (14.17)  $2n+2$  vergelijkingen in  $\xi^0, \xi^k, w_\lambda, \xi'^0, \xi'^k, w_\lambda, \sigma, \sigma'$ . Elimineer  $\frac{\sigma}{\sigma'}$  dan blijven er  $2n+1$  vergelijkingen in  $\xi^0, \xi^k, w_\lambda, \xi'^0, \xi'^k, w_\lambda$ .

In beide gevallen moeten uit de  $2n+\varepsilon$  vergelijkingen de  $\xi^0, \xi^k, w_\lambda$  en evenzo de  $\xi'^0, \xi'^k, w_\lambda$  kunnen worden opgelost. Daartoe is n.e.v. dat de functionaaldeterminant van (14.17) ongelijk nul is. Dat komt neer op de voorwaarde

Noot: Aanvulling bij blz. 40: Bij de oplossing van de  $\xi^k, w_\lambda$  voor  $\varepsilon$  blijkt dat de  $\phi^k$  in (14.1) homogeen van de graad 0 in  $w_\lambda$  worden en produkten  $\Omega \psi_\lambda$  (zie (14.1) en (14.3)) homogeen van de graad 1 in

-43-

$$14.18) \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|cc|} \hline \begin{array}{c} \xleftarrow{\tau_1} \quad \times \quad \xrightarrow{n+\varepsilon-\tau_1} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_a \partial q_b} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^x \partial q_b} \\ \hline \frac{\partial^2 V}{\partial q_a \partial \xi^y} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^x \partial \xi^y} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \tau_1 \\ \times \\ \downarrow n+\varepsilon-\tau_1 \end{array} \end{array} \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a = 1 - \varepsilon, \dots, \tau_1 - \varepsilon \\ x = \tau_1 - \varepsilon + 1, \dots, n \\ b = 1 - \varepsilon, \dots, \tau_2 - \varepsilon \\ y = \tau_2 - \varepsilon + 1, \dots, n \end{array}$$

Er zijn 4 verschillende gevallen voor  $\varepsilon = 1$ . Men heeft immers alvorens  $V$  in te voeren eerst de  $\xi^0, \xi^k$  op willekeurige wijze mogen permuteren, waarbij dan  $q_a, q_\lambda$  op dezelfde manier meegepermuterd mogen worden en precies hetzelfde geldt voor  $\xi^0, \xi^k$  en  $q_a, q_\lambda$ . Daarbij kan nu  $\sigma$  in de  $q_a$  of in de  $q_\lambda$  terechtgekomen zijn en  $\tau$  in de  $q_\lambda$  of in de  $q_y$ . Dat geeft vier verschillende gevallen van een functie  $V$  (gewoonlijk genererende functie der  $C_1$ -transformatie genoemd). Wij nemen hier als voorbeeld het geval dat  $\sigma$  een van de  $q_a$  geworden is en  $\tau$  een van de  $q_y$ . Voor het gemak schrijven we nu  $\tau_1$  in plaats van  $\tau_1 - 1$ , dan zijn de vergelijkingen

$$14.19) \quad \begin{array}{ll} a) \left\{ \begin{array}{l} \xi^0 - \frac{\partial V}{\partial \sigma} = 0 \\ \xi^{\sigma} - \frac{\partial V}{\partial q_\sigma} = 0; \sigma = 1, \dots, \tau_1 \end{array} \right. & c) q_\mu + \frac{\partial V}{\partial \xi^\mu} = 0; \mu = \tau_1 + 1, \dots, n \\ b) \xi^b + \frac{\partial V}{\partial q_b} = 0; b = 1, \dots, \tau_2 & d) \left\{ \begin{array}{l} \tau - \frac{\partial V}{\partial \xi^0} = 0 \\ q_\eta - \frac{\partial V}{\partial \xi^\eta} = 0; \eta = \tau_2 + 1, \dots, n \end{array} \right. \end{array}$$

( $\eta$  = gothische  $y$ )

en de condities nemen de vorm aan

$$14.20) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial q_b} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_\sigma \partial q_b} & \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^b \partial q_b} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial \xi^0} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_\sigma \partial \xi^0} & \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^b \partial \xi^0} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial \xi^\eta} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_\sigma \partial \xi^\eta} & \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^b \partial \xi^\eta} \end{vmatrix} \neq 0$$

Laten we nu eens proberen een genererende functie te construeren voor de identische transformatie, juist voor dit geval. Dan weten we dat (zie (14.1))

$$14.21) \quad \begin{array}{ll} \frac{\partial V}{\partial \sigma} = \xi^0 & \frac{\partial V}{\partial \xi^\mu} = -q_\mu \\ \frac{\partial V}{\partial q_\sigma} = \xi^\sigma & \frac{\partial V}{\partial \xi^0} = \sigma \\ \frac{\partial V}{\partial q_b} = \xi^b & \frac{\partial V}{\partial \xi^\eta} = q_\eta \end{array}$$

Nu zitten in  $V$  alleen

$$14.22) \quad \sigma, \xi^0, \xi^\mu, q_\sigma, \xi^\eta, q_b$$

$$\sigma = 1, \dots, \tau_1; \mu = \tau_1 + 1, \dots, n$$

$$b = 1, \dots, \tau_2; \eta = \tau_2 + 1, \dots, n$$

De enige mogelijkheid is dus dat de indices  $1, \dots, \tau$ , samenvallen met  $\tau_1, \dots, \tau$  en  $1, \dots, \tau_1$  met  $\tau_1+1, \dots, n$  en dit kan alleen als of  $\tau_1 = n, \tau_2 = 0$  of  $\tau_1 = n, \tau_2 = 0$

Dat levert twee mogelijkheden voor  $V$

$$14.23) \quad V = \sigma' \xi^0 + \eta_\lambda \xi^\lambda (\tau_1 = n, \tau_2 = 0)$$

$$V = -\sigma' \xi^0 - \eta_\lambda \xi^\lambda (\tau_1 = 0, \tau_2 = n)$$

### 15. $C_3$ -transformaties

Contact-transformaties van de derde soort zijn  $C_1$ -transformaties met  $\sigma = 1$ . Voor ieder vector-veld, waarvoor de  $C_3$ -transformatie veldconserverend is, is niet alleen  $K$  maar ook  $2\rho$  en dus  $\mathcal{R}$  invariant, alsmede dragers en rotatiedragers. Er is nog een andere invariantie. Zij een  $\mathcal{W}_1$  met velddimensie 1 gegeven. Vorm dan de integraal

$$15.1) \quad \int \varepsilon d\xi^0 + w_\lambda d\xi^\lambda$$

tussen twee vaste punten van het veldgebied. Dan is deze integraal invariant bij alle  $C_3$ -transformaties, omdat  $\varepsilon d\xi^0 + w_\lambda d\xi^\lambda$  invariant is. Deze integraal is dan en alleen dan nul voor iedere keuze der eindpunten als

$$\mathcal{W}_1 = N_1$$

Om de meest algemene  $C_3$ -transformatie te construeren gebruiken we een van de twee regels voor de constructie van  $C_1$ -transformaties met de bijconditie  $\sigma = 1$ .

Regel I wordt erg gemakkelijk voor  $\varepsilon = 0$  daar dan  $\sigma'/\sigma$  vrij gekozen mag worden. Schrijven we voor het gemak  $\chi_a$  voor  $\chi_a/\sigma$  dan gaat (14.8) over in

$$15.2) \quad w_\lambda = -\chi_a \frac{\partial F^a}{\partial \xi^\lambda}; \quad w_\lambda = \chi_a \frac{\partial F^a}{\partial \xi^\lambda}$$

en elimineren van de  $\chi_a$  geeft  $2n - \tau$  vergelijkingen die tezamen met de  $\tau$  vergelijkingen  $F^a = 0$  de  $C_3$ -transformatie vastleggen mits de  $F^a$  voldoen aan de voorwaarde dat de determinant (14.9) voor  $\varepsilon = 0$  ongelijk nul is (er valt een rij en een kolom weg). Het is duidelijk dat nu de  $\phi^k$  homogeen van de graad 0 in de  $w_\lambda$  zijn en de  $\psi_\lambda$  homogeen van de graad 1.

Voor  $\varepsilon = 1$  is er een complicatie omdat de keus van  $\sigma'/\sigma$  niet vrij is. De  $F^a$  mogen dus ook niet vrij gekozen worden maar zo dat  $\sigma'/\sigma$  niet 1 wordt. Uit (14.8) zien we dat daarvoor n.e.v. is dat

$$15.3) \quad \chi_a \left( \frac{\partial F^a}{\partial \xi^0} + \frac{\partial F^a}{\partial \xi^0} \right) = 0; \quad a = 1, \dots, \tau$$

en dat is voor alle waarden van  $\chi_a$  alleen waar indien de  $F^a$  van de  $\xi^0$  en  $\xi^0$  alleen afhangen in de combinatie

$$15.4) \quad \sum \stackrel{\text{def}}{=} \xi^0 - \xi^0$$

De vergelijkingen (14.7,8) gaan nu over in (schrijf weer  $\chi_a$  voor  $\chi_a/\sigma$ )

$$15.5) \quad F^a \left( \sum \xi^k, \xi^k \right) = 0$$

$$15.6) \quad \begin{cases} 1 = \chi_a \frac{\partial F^a}{\partial Z} \\ w_\lambda = -\chi_a \frac{\partial F^a}{\partial \xi^\lambda} \\ 'w_\lambda = \chi_a \frac{\partial F^a}{\partial \xi^\lambda} \end{cases}$$

en de determinant (14.9) behoudt zijn vorm behalve dat  $\xi = 1$  en dat  $\xi^0$  overgaat in  $Z$ . Uit deze vergelijkingen laten zich na eliminatie der  $\chi_a$  de  $Z = \xi^0 - \xi^0$  en  $'w_\lambda$  oplossen als functies van  $\xi^k, w_\lambda$ .

Gebruiken we regel II voor  $\xi = 0$  dan is nu  $\sigma' = \sigma$  en dus

$$15.7) \quad V(q_a, 'q_b, \xi^x, \xi^y) = \sigma V(w_a, 'w_b, \xi^x, \xi^y)$$

$\alpha = 1, \dots, r, \quad x = r+1, \dots, n$   
 $b = 1, \dots, r_2, \quad y = r_2+1, \dots, n$

Bijgevolg krijgen we na invoeren van  $w_a$  en  $'w_b$  in plaats van  $q_a$  en  $'q_b$

$$15.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_a} &\rightarrow \frac{\partial V}{\partial w_a} ; & \frac{\partial V}{\partial 'q_b} &\rightarrow \frac{\partial V}{\partial 'w_b} \\ \frac{\partial V}{\partial \xi^x} &\rightarrow \sigma \frac{\partial V}{\partial \xi^x} ; & \frac{\partial V}{\partial \xi^y} &\rightarrow \sigma \frac{\partial V}{\partial \xi^y} \end{aligned}$$

zodat nu (14.17) overgaat in

$$15.9) \quad \begin{aligned} a) \quad \xi^a - \frac{\partial V}{\partial q_a} &= 0 & c) \quad q_x + \frac{\partial V}{\partial \xi^x} &= 0 \\ b) \quad ' \xi^b + \frac{\partial V}{\partial 'q_b} &= 0 & d) \quad 'w_y - \frac{\partial V}{\partial \xi^y} &= 0 \end{aligned}$$

De condities voor  $V$  hebben de vorm (14.18) maar met  $w_a$  en  $'w_b$  in plaats van  $q_a$  en  $'q_b$ .

In het geval dat  $\xi = 1$  is, is de keuze van  $\sigma'/\sigma$  niet vrij en om  $\sigma' = \sigma$  te krijgen moet  $V$  aan zekere voorwaarden voldoen. Men kan bewijzen dat het geval, waarbij  $\sigma$  bij de  $q_a$  terechtkomt en  $\sigma'$  bij de  $'q_b$  hier niet kan voorkomen en de andere 3 gevallen wel. Nemen we wederom het geval  $\sigma$  in de  $q_a$ ,  $\sigma'$  in de  $'q_y$  (blz. 44) dan levert  $\sigma' = \sigma$  en (14.19 d)

$$15.10) \quad \frac{\partial V}{\partial \xi^0} = \sigma$$

en dus is  $V$  van de vorm

$$15.11) \quad V = \sigma' \xi^0 + W(\sigma, q_a, 'q_b, \xi^b, \xi^y)$$

homogeen van de graad 1 in  $\sigma, q_a, 'q_b$ , dus

$$15.12) \quad V = \sigma \xi^0 + \sigma W(w_a, 'w_b, \xi^b, \xi^y)$$

met de voorwaarden voor  $W$

-46-

$$115.13) \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\tau_1} \quad \xrightarrow{n-\tau_1} \\ \begin{array}{|cc|} \hline \begin{array}{c} \xrightarrow{\tau_2} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial w_{\alpha} \partial w_{\beta}} \end{array} & \begin{array}{c} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^k \partial w_{\beta}} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \xrightarrow{n-\tau_2} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial w_{\alpha} \partial \xi^k} \end{array} & \begin{array}{c} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^k \partial \xi^l} \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array} \neq 0$$

De vergelijkingen worden:

$$15.4) \quad \begin{array}{ll} \xi^{\alpha} - \frac{\partial W}{\partial w_{\alpha}} = 0 & w_{\beta} + \frac{\partial W}{\partial \xi^k} = 0 \\ \xi^{\beta} + \frac{\partial W}{\partial w_{\beta}} = 0 & w_{\eta} - \frac{\partial W}{\partial \xi^l} = 0 \end{array}$$

$\xi^{\alpha} - \xi^{\alpha_0} = -W - w_{\alpha} \frac{\partial W}{\partial w_{\alpha}} - w_{\beta} \frac{\partial W}{\partial \xi^k}$

$\alpha = 1, \dots, \tau_1; \quad \beta = 1, \dots, \tau_2;$   
 $\eta = \tau_1 + 1, \dots, n; \quad \eta = \tau_2 + 1, \dots, n$

In het speciale geval dat  $W$  homogeen is van de graad 1 in  $w_{\alpha}, w_{\beta}$  hebben we dat  $\xi^0$  invariant is en dat er alleen een  $C_2$ -transformatie in  $\xi^k, w_{\lambda}$  overblijft.

## 16. $C_2$ -transformaties

Een  $C_2$ -transformatie is een transformatie in  $\xi^0, \xi^k, w_{\lambda}$  die de Pfaffse vorm  $\varepsilon d\xi^0 + w_{\lambda} d\xi^{\lambda}$  invariant laat op een additieve volledige differentiaal na. Ook deze transformaties werden "contacttransformaties" genoemd, hoewel zij de typische contacteigenschap missen. Er bestaat een zekere dualiteit tussen  $C_1$ - en  $C_2$ -transformaties. We schrijven de voorwaarde in de symmetrische vorm

$$16.1) \quad d's + \varepsilon d\xi^0 + w_{\lambda} d\xi^{\lambda} = ds + \varepsilon d\xi^0 + w_{\lambda} d\xi^{\lambda}$$

en noteren dat  $\varepsilon$  en  $s$  functies zijn van  $\xi^0, \xi^k, w_{\lambda}$  waarvan ons alleen het verschil interesseert:

$$16.2) \quad s - s' = \Omega(\varepsilon \xi^0, \xi^k, w_{\lambda}) = \Omega(\varepsilon' \xi^0, \xi'^k, w_{\lambda})$$

Is een  $C_2$ -transformatie veldconserverend t.o.v. van een veld  $\varepsilon w_0 = \varepsilon, w_{\lambda} = f_{\lambda}(\xi^k)$  dan volgt uit (16.1) dat de rotatieklasse  $\mathcal{F}^0$  en de rotatiedragers invariant zijn maar  $k$  en  $\mathcal{M}$  in het algemeen niet.

$C_2$ -transformaties hebben nog een andere invariantie. Stel het veldgebied van een  $\mathcal{U}_1$  is ééndimensionaal en gesloten. Vormt men dan over dit gebied de integraal  $\int \varepsilon d\xi^0 + w_{\lambda} d\xi^{\lambda}$  dan is deze integraal invariant bij  $C_2$ -transformaties. De integraal is nul wanneer de  $\mathcal{U}_1$  een  $N_1$  is (niet noodzakelijk). Bij een  $C_2$ -transformatie blijft die integraal nul maar de  $N_1$  behoeft geen  $N_1$  te blijven. Is de integraal  $\neq 0$  dan kan de  $\mathcal{U}_1$  nooit door een  $C_2$ -transformatie in een punt worden samengetrokken.

Het is handig om te schrijven

$$16.3) \quad \chi \stackrel{\text{def}}{=} s + \varepsilon \xi^0; \quad \chi' \stackrel{\text{def}}{=} s' + \varepsilon' \xi^0$$

Dan gaat (16.2) over in  $d'z + w_\lambda d'\xi^\lambda = dz + w_\lambda d\xi^\lambda$

Om dus een  $C_2$ -transformatie te verkrijgen heeft men maar een  $C_3$ -transformatie te construeren in  $z, w_\lambda$  en  $\xi^k$ . Is dat gebeurd dan hebben we vergelijkingen van de vorm

$$16.5) \quad \begin{aligned} a) \quad \xi - s + \varepsilon \xi^0 - \varepsilon \xi^0 &= \chi(\xi^\mu, w_\nu) \\ b) \quad \xi^k &= \phi^k(\xi^\mu, w_\nu) \\ c) \quad w_\lambda &= \psi_\lambda(\xi^\mu, w_\nu) \end{aligned}$$

Voor  $\varepsilon = 0$  stelt (16.5 b, c) de  $C_2$ -transformatie voor.

Voor  $\varepsilon = 1$  kiezen we voor  $\xi - s$  een willekeurige functie van  $\xi^k, w_\lambda$ . Om de  $C_3$ -transformatie te verkrijgen kan men één der beide regels toepassen.

### § 17. Infinitesimale punttransformaties in de $X_n$ der $\xi^k$

$$17.1) \quad \xi^k = \xi^k + X^k dt$$

heet een infinitesimale punttransformatie in  $X_n$ .  $X^k$  is een contravariant vectorveld en  $t$  een hulpvariabele. Met Lie schrijft men

$$(17.2) \quad X \stackrel{\text{def}}{=} X^\mu \partial_\mu$$

en noemt  $X$  het symbool der infin. transformatie. (17.1) kan ook worden geschreven

$$(17.3) \quad d\xi^k = X^k dt$$

en

$$(17.4) \quad \frac{d\xi^k}{dt} = X^k(\xi^\mu)$$

is de gewone differentiaalvergelijking van de stroomlijnen van het veld  $X^k$ . De oplossing is van de vorm

$$(17.5) \quad \xi^k = f^k(\xi^\lambda, t); f^k(\xi^\lambda, 0) = \xi^k$$

Deze vergelijking stelt voor een groep van  $\infty^1$  transformaties, die allemaal de stroomlijnen van  $X^k$  invariant laten. Maar niet iedere punttransformatie, die ontstaat door alle punten langs die stroomlijnen te verschuiven (natuurlijk continu) behoort tot die groep. Men make zich dat goed duidelijk en ook dat de groep behorende bij  $X^k$  niet dezelfde is als die behorende bij  $\sigma X^k$  tenzij  $\sigma$  een constante is. De groep heet de een-parameter groep behorende bij de infinitesimale transformatie.

Wij herinneren eraan, dat contacttransformaties in een  $X_{n+\varepsilon}$  konden worden geduid als transformaties, die in een  $X_{2n+\varepsilon}$  een bepaalde differentiaalvorm (of vectorveld) invariant of op een factor of additieve gradient na invariant laten. Om dus de behandeling van infinitesimale contacttransformaties voor te bereiden moeten we in de  $X_n$  der  $\xi^K$  een covariant vectorveld  $w_\lambda$  gaan leggen en bij voorbeeld eisen, dat  $w_\lambda d\xi^\lambda$  bij de transformatie (17.2) op een factor, bv.  $1 + \mu dt$ , na invariant is. Daarbij is de getransformeerde waarde  $w'_\lambda$  van het veld eenvoudig de veldwaarde in het getransformeerde punt  $\xi^K$ :

$$17.6) \quad w'_\lambda = w_\lambda + X^\mu \partial_\mu w_\lambda dt$$

terwijl voor  $d\xi^K$  uit (17.2) volgt

$$17.7) \quad d\xi^K = d\xi^K + \partial_w X^K d\xi^w dt$$

Combinerende geeft dit

$$17.8) \quad w'_\lambda d\xi^\lambda = (w_\lambda + \square_\lambda w_\lambda dt) d\xi^\lambda$$

waarin

$$17.9) \quad \square_\lambda w_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} X^\mu \partial_\mu w_\lambda + w_\mu \partial_\lambda X^\mu$$

de bekende Lie'se afgeleide van het veld  $w_\lambda$  is t.o.v. het veld  $X^K dt$  (verg. blz. 33 dictaat tensoranalyse en hfdstk II § 13 Pfaffs Problem)

$\square_\lambda w_\lambda$  is een vector en een comitante van  $w_\lambda$  en  $X^K$ .

In het onderhavige geval moet  $\square_\lambda w_\lambda = \mu w_\lambda$  zijn, dus

$$17.10) \quad X^\mu \partial_\mu w_\lambda + w_\mu \partial_\lambda X^\mu = X^\mu W_{\mu\lambda} + \partial_\lambda (w_\mu X^\mu) = \mu w_\lambda$$

le geval  $w_\mu X^\mu = 0$ , d.w.z. de stroomlijnen van  $X^K$  zijn integraalkrommen van het veld  $w_\lambda$ . Voor  $\mathcal{P} = 2p+1$  kan  $w_\lambda$  niet in het gebied van  $W_{\mu\lambda}$  liggen, zodat  $\mu = 0$  moet zijn. Voor  $\mathcal{P} = 2p$  drukt (17.10) uit dat  $X^\mu W_{\mu\lambda}$  de richting van  $w_\lambda$  heeft. Dus is (17.10) equivalent met

$$17.11) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & \left. \begin{aligned} X^\mu W_{\mu\lambda} &= 0 \\ X^\mu w_\mu &= 0 \end{aligned} \right\} & \text{voor } \mathcal{P} = 2p+1 \\ \text{b)} \quad & \left. \begin{aligned} X^\mu W_{\mu[\lambda} w_{\nu]} &= 0 \\ X^\mu w_\mu &= 0 \end{aligned} \right\} & \text{voor } \mathcal{P} = 2p \end{aligned}$$

Vergelijken we (17.11) met de vergelijkingen voor de karakteristieken van  $w_\lambda$  (zie blz. 16, form (6.4)<sup>1)</sup>)

$$17.12) \quad \begin{aligned} (S_2=S_4) \quad & \left. \begin{aligned} d\xi^\mu W_{\mu\lambda} &= 0 \\ d\xi^\mu w_\mu &= 0 \end{aligned} \right\} & \text{voor } \mathcal{P} = 2p+1 \\ (S_3=S_4) \quad & \left. \begin{aligned} d\xi^\mu W_{\mu[\lambda} w_{\nu]} &= 0 \\ d\xi^\mu w_\mu &= 0 \end{aligned} \right\} & \text{voor } \mathcal{P} = 2p \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Verbeter in (6.4) de fout in  $S_4$ :  $W_{\mu\lambda} d\xi^\mu = 0$  moet zijn  $W_{\mu\lambda} d\xi^\lambda$

dan volgt dat voor  $w_\mu X^\mu = 0$  aan (17.10) voldaan is indien (n.e.v.) de stroomlijnen van  $X^K$  liggen in de karakteristieken van  $w_\lambda$ .

2e geval.  $w_\mu X^\mu \neq 0$  Schrijf  $\tilde{F} = w_\mu X^\mu$ . Dan worden de vergelijkingen

$$17.13) \quad a) \quad X^\mu W_{\mu\lambda} + \partial_\lambda \tilde{F} = \mu w_\lambda$$

$$b) \quad X^\mu w_\mu = \tilde{F} \quad (\text{met index})$$

Voor  $\mathcal{P} = 2p+1$  is  $\partial_\lambda \tilde{F}$  of nul of liggende in het  $\lambda$ -gebied van  $w_\lambda, W_{\mu\lambda}$  en dus is  $\tilde{F}$  of een constante of een functie 1 of een functie met index 2. Is  $\tilde{F}$  een constante dan is  $\partial_\lambda \tilde{F} = 0$  en dus  $\mu = 0$ . Is  $\tilde{F}$  van index 2 dan ligt  $\partial_\lambda \tilde{F}$  in het gebied van  $W_{\mu\lambda}$  en is dus eveneens  $\mu = 0$ . Bepalen we eerst de oplossingen van (17.13) voor  $\tilde{F} = 0$ , dan is (17.13) gelijkwaardig met (17.11a) en we weten dat (17.11a)  $n - \mathcal{P}$  onafhankelijke oplossingen heeft. Zijn dit  $X_1^K, \dots, X_{n-\mathcal{P}}^K$  dan is de meest algemene oplossing van (17.13) voor  $\tilde{F} = 0$

$$17.14) \quad X_S^K = \alpha_1 X_1^K + \dots + \alpha_{n-\mathcal{P}} X_{n-\mathcal{P}}^K$$

Kiezen we nu voor  $\tilde{F}$  een willekeurige constante of functie van index 1 of 2 dan kan  $\mu$  eenduidig uit (17.13a) worden opgelost en wel onafhankelijk van  $X^\mu$  omdat  $w_\lambda$  niet in het gebied van  $W_{\mu\lambda}$  ligt. Het verschil van twee oplossingen van (17.13) behorende bij dezelfde  $\tilde{F}$ -waarde is dus altijd een oplossing van (17.11a). Is dus  $X_F^K$  een willekeurige oplossing van (17.13) afhangende van de keuze van  $\tilde{F}$  dan is de meest algemene oplossing van (17.13) van de vorm

$$17.15)$$

$$X^K = X_F^K + X_S^K$$

Resumerende hebben wij dus:

De meest algemene infinitesimale punttransformatie, die een veld  $w_\lambda$  van de klasse  $\mathcal{R} = 2p+1$  invariant laat op een factor  $1 + \mu dt$  na heeft de vorm (17.15) en er zijn 4 gevallen

- 17.16)
- (0)  $\tilde{F} = 0$  ;  $X = X_S$  ;  $\mu = 0$  , stroomlijnen in dragers (= charakt),
  - (1)  $\tilde{F} = \text{constant} \neq 0$  ;  $\mu = 0$  , stroomlijnen in rotatiedragers
  - (2)  $\tilde{F}$  index 2 ;  $\mu = 0$
  - (3)  $\tilde{F}$  index 1 ;  $\mu$  kan uit  $\tilde{F}$  worden afgeleid.

Voor  $\mathcal{R} = n$  worden de dragers punten en vervalt dus het geval (0). We blijven bij dit geval. We gebruiken weer de notatieverandering van § 13 waarbij  $n$  overgaat in  $2n+1$  en de differentiaalvorm de vorm

17.17)

$$d\xi^0 + w_\lambda d\xi^\lambda = W_B dX^B$$

$$B = 0, \dots, n, (1), \dots, (n)$$

verkrijgt. Dan worden de infinitesimale punttransformaties die door (17.16) gegeven zijn  $C_1$ -transformaties in de  $X_{n+1}$ , der  $\xi^0, \xi^K, W_B$  en de rotatie  $W_{CB}$  hebben nu alleen de kentallen

(17.18)

$$W_{(1)1} = -W_{1(1)} = 1 ; W_\lambda = w_\lambda ; W_{(\lambda)} = 0$$

en de vergelijkingen (17.13) worden nu

17.19)

$$X^C W_{CB} + \partial_B \tilde{F} = \mu W_B$$

$$X^C W_C = \tilde{F}$$

of

17.20)

$$X^{(K)} + \partial_K \tilde{F} = \mu W_K ; X^0 + X^K w_K = \tilde{F}$$

$$X^K - \partial_{(K)} \tilde{F} = 0$$

$$\partial_0 \tilde{F} = \mu W_0 = \mu$$

waaruit onmiddellijk volgt

17.21)

$$X^\lambda = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial w_\lambda} ; X^{(K)} = - \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi^K} + w_K \partial_0 \tilde{F}$$

De meest algemene infinitesimale  $C_1$ -transformatie in  $\xi^0, \xi^K, w_\lambda$  is dus

17.22)

$$\begin{aligned}\delta \xi^0 &= -w_\lambda \frac{\partial F}{\partial \xi^\lambda} dt + \bar{F} dt \\ \delta \xi^K &= \frac{\partial F}{\partial w_K} dt \\ \delta w_\lambda &= -\frac{\partial F}{\partial \xi^\lambda} dt + w_\lambda \frac{\partial F}{\partial \xi^0} dt \quad ; \quad \mu = \frac{\partial F}{\partial \xi^0}\end{aligned}$$

waar  $\bar{F}$  een willekeurige functie van  $\xi^0, \xi^K, w_\lambda$  is. Er zijn drie gevallen (verg. (17.16))

- (1)  $\bar{F} = \text{constant} \neq 0$ ;  $\xi^K$  en  $w_\lambda$  zijn invariant,  $\mu = 0$ , triviale  $C_1$ -transformatie;
- (2)  $\bar{F}$  is onafhankelijk van  $\xi^0$ ;  $\mu = 0$ , algemene  $C_3$ -transformatie, tevens in  $\xi^K, w_\lambda$  algemene  $C_2$ -transformatie.
- (3)  $\bar{F}$  algemeen;  $\mu = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \xi^0}$ , algemene  $C_1$ -transformatie

We keren nu weer terug tot de punttransformatie in  $X_n$  die  $w_\lambda d\xi^\lambda$  op een factor na invariant laat en beschouwen nu het geval  $\mathcal{P} = 2\rho$ .

Voor  $\bar{F} = 0$  en  $\mu = 0$  nemen de vergelijkingen (17.13) de vorm aan

$$\begin{aligned}X^\mu W_{\mu\lambda} &= 0 \\ X^\mu w_\mu &= 0\end{aligned}$$

en deze brengen tot uitdrukking dat de stroomlijnen van  $X^K$  in de dragers (= rotatiedragers) van het veld liggen. Zij  $X^K$  de algemene oplossing dan zal het verschil van twee oplossingen dan (17.13) voor dezelfde waarden van  $\bar{F}$  en  $\mu$  een oplossing van (17.24) zijn, zodat de algemene oplossing van (17.13) de vorm heeft

$$X^K = X_{F,\mu}^K + X_S^K$$

waarin  $X_{F,\mu}^K$  een willekeurige oplossing van (17.13) is. Is  $\bar{F} = 0$  maar  $\mu \neq 0$  dan gaat (17.13) over in

$$\begin{aligned}X^\mu W_{\mu[\lambda} w_{K]} &= 0 \\ X^\mu w_\mu &= 0\end{aligned}$$

hetgeen bewijst dat in dat geval de stroomlijnen althans in de karakteristieken liggen. Nu kan men  $\bar{F}$  niet willekeurig kiezen want algemeen geldt dat

$$\begin{aligned}17.27) \quad X^\mu W_{\mu} W_{[\lambda, K_1} \dots W_{\lambda_p, K_p]} + 2\rho X^\mu W_{\mu} W_{[\lambda, K_1} W_{\lambda_2, K_2} \dots W_{\lambda_p, K_p]} = \\ = \cancel{2\rho X^\mu W_{\mu} W_{[\lambda, K_1} \dots W_{\lambda_p, K_p]}} = 0\end{aligned}$$

omdat  $\mathcal{P} = 2\rho$  is.

Dit laat zich ook als volgt schrijven

$$17.28) \quad F \overset{2p}{j} - 2p \overline{F} \overset{2p-1}{j} = 0$$

en deze vergelijking drukt uit dat  $\frac{1}{F} w_\lambda$  voor  $F \neq 0$  van de klasse  $2p - 1$  is (verg. § 10).

Resumerende hebben we dus:

De meest algemene infinitesimale punttransformatie, die een veld  $w_\lambda$  van de klasse  $\mathcal{P} = 2p$  invariant laat op een factor  $1 + \mu dt$  na heeft de vorm (17.25) en er zijn 4 gevallen

- (0)  $F = 0$ ;  $\mu = 0$ ;  $X = X_S$ , stroomlijnen in dragers=rotatiedragers  
 (1)  $F = 0$ ;  $\mu \neq 0$ ; stroomlijnen in karakteristieken  
 17.29) (2)  $F$  is een oplossing van (17.28);  $\mu = 0$   
 (3)  $F$  is een oplossing van (17.28);  $\mu \neq 0$  en willekeurig.

Voor  $\mathcal{P} = n$  vervalt weer het geval (0). We blijven bij dit geval en gebruiken de notatieverandering van § 13 waarbij  $n$  overgaat in  $2n$  en de differentiaalvorm de vorm

$$w_\lambda d\xi^\lambda = W_B d\xi^B \quad B = 1, \dots, n, (1), \dots, (n)$$

verkrijgt. Dan worden de infinitesimale punttransformaties die door (17.29) gegeven zijn  $C_1$ -transformaties in de  $X_n$ . De rotatie  $w_{CB}$  heeft alleen de kentallen aangegeven in (17.16) en hetzelfde geldt voor  $w_B$ , alleen  $w_0$  vervalt nu.

De vergelijkingen (17.19) worden nu

$$17.31) \quad \begin{aligned} X^{(K)} + \partial_K F &= \mu w_K \\ X^K - \partial_{(K)} F &= 0 \end{aligned}$$

waaruit direct volgt

$$17.32) \quad X^\lambda = \frac{\partial F}{\partial w_\lambda} ; \quad X^{(K)} = - \frac{\partial F}{\partial \xi^K} + \mu w_K$$

De meest algemene infinitesimale  $C_1$ -transformatie in  $\xi^K, w_\lambda$ , is dus

$$17.33) \quad \begin{aligned} \delta \xi^K &= \frac{\partial F}{\partial w_K} dt \\ \delta w_\lambda &= - \frac{\partial F}{\partial \xi^\lambda} dt + \mu w_\lambda dt \end{aligned} \quad \delta(w_\lambda d\xi^\lambda) = \mu dt w_\lambda d\xi^\lambda$$

waarin  $\mu$  een willekeurige functie is en  $F$  een willekeurige oplossing van (17.28) is, welke vergelijking hier de vorm

$$17.34) \quad w_\lambda \frac{\partial F}{\partial w_\lambda} = F$$

aanneemt die uitdrukt dat  $F$  homogeen van de eerste graad in  $w_\lambda$  moet zijn (verg. § 10). Er zijn drie gevallen:

- (1)  $F=0$ ;  $\mu$  willekeurig, gelijkvormigheidstransformatie in  $w_\lambda$ , speciaal  $G_1$ -transformatie ;  
 17.35) (2)  $F$  homogeen graad 1 in  $w_\lambda$ ;  $\mu = 0$ ; algemene  $G_3$ -transformatie  
 (3)  $F$  dito;  $\mu$  willekeurig; algemene  $G_1$ -transformatie.

Nu gaan we eisen dat de punttransformatie (17.1) in  $X_{n+1}$  het veld  $w_\lambda$  op een additieve gradient na invariant laat. Dan moet  $\frac{D}{L} w_\lambda$  een gradient zijn, dus (verg. (17.10))

$$17.36) \quad X^\mu w_{\mu\lambda} + \partial_\lambda (X^\mu w_\mu) = \partial_\lambda s$$

Schrijven we nu

$$17.37) \quad F \stackrel{\text{def}}{=} X^\mu w_\mu; \quad G \stackrel{\text{def}}{=} F - s$$

dan gaat (17.36) over in

$$X^\mu w_{\mu\lambda} + \partial_\lambda G = 0$$

$$17.38) \quad X^\mu w_\mu = F = G + s$$

Nemen we nu eerst  $\gamma p = 2p + 1$ . Dan moet  $\partial_\lambda G$  in het gebied van  $w_{\mu\lambda}$  liggen en  $G$  is dus een constante of een functie met index 2. Nemen we nu eerst  $G = \text{constant}$  en  $s = -G$  dan drukt (17.38) uit dat  $X^k$  in de dragers moet liggen. Is alleen  $G$  constant dan volgt alleen dat  $X^k$  in de rotatiedragers moet liggen. Zij  $X_s^k$  de meest algemene oplossing van (17.38) voor  $G = \text{constant} = -s$  dan zal het verschil van twee oplossingen voor dezelfde waarden van  $G$  en  $s$  een oplossing voor het stelsel met  $G = \text{constant} = -s$  zijn. De algemene oplossing van (17.38) is dus van de vorm

$$17.39) \quad \boxed{X^k = X_{G,s}^k + X_s^k}$$

waarin  $X_{G,s}^k$  een willekeurige niet speciale oplossing van (17.38) is. Er zijn vier gevallen:

- (0)  $G = \text{constant}$ ;  $s = -G$ ;  $X = X_s$ , stroomlijnen in dragers (= karakteristieken)  
 17.40) (1)  $G = \text{constant}$ ;  $s$  willekeurig; stroomlijnen in rotatiedragers  
 (2)  $G$  index 2;  $s = \text{constant}$   
 (3)  $G$  index 2;  $s$  willekeurig.

Voor  $\mathcal{P} = n$  vervalt weer het geval (0). We blijven bij dit geval en gebruiken weer de notatieverandering van § 13 uitgedrukt in (17.18). De vergelijkingen (17.38) worden dan

$$17.41) \quad \begin{aligned} X^C W_{CB} + \partial_B G &= 0 \\ X^C W_C &= G + s \end{aligned}$$

en deze gaan ingevolge (17.18) over in

$$17.42) \quad X^0 + W_\lambda \frac{\partial G}{\partial w_\lambda} = G + s; \quad X^\lambda = \frac{\partial G}{\partial w_\lambda}; \quad X^{(K)} = - \frac{\partial G}{\partial \xi^K}; \quad \frac{\partial G}{\partial \xi^0} = 0$$

De meest algemene  $C_2$ -transformatie in  $\xi^0, \xi^K, w_\lambda$  heeft dus de vorm

$$17.43) \quad \begin{aligned} \delta \xi^0 &= -w_\lambda \frac{\partial G}{\partial w_\lambda} dt + (G + s) dt \\ \delta \xi^K &= \frac{\partial G}{\partial w_K} dt \quad \delta(d\xi^0 + w_\lambda d\xi^\lambda) = ds dt \\ \delta w_\lambda &= - \frac{\partial G}{\partial \xi^\lambda} dt \end{aligned}$$

waar  $G$  een willekeurige functie van  $\xi^K, w_\lambda$  is en  $s$  een willekeurige functie van  $\xi^0, \xi^K, w_\lambda$ . Er zijn drie gevallen (verg. (17.40))

- (1)  $G = \text{constant}$ ;  $s$  willekeurig,  $\xi^K$  en  $w_\lambda$  invariant; triviale  $C_2$ -transformatie
- 17.44) (2)  $G$  willekeurige functie van  $\xi^K, w_\lambda$ ;  $s$  constant; algemene  $C_2$ -transformatie
- (3)  $G$  dito;  $s$  willekeurig; algemene  $C_2$ -transformatie

Is  $\mathcal{P} = 2p$  dan ligt blijkens (17.38)  $\partial_\lambda G$  in het gebied van  $W_{\mu\lambda}$  en dus is  $G$  een functie met index 1 of 2 of een constante. Is  $G$  een constante dan volgt uit (17.38) dat  $s = -G$  en dat de stroomlijnen liggen in de dragers (= rotatiedragers). Ingevolge (17.38) is steeds

$$17.45) \quad \begin{aligned} G W[\mu, \lambda, \dots, W_{\mu_p \lambda_p}] - 2p (\partial_{[\mu} G) W_{\lambda]} W_{\mu_2 \lambda_2} \dots W_{\mu_p \lambda_p} &= \\ = X^\mu W_\mu W[\mu, \lambda, \dots, W_{\mu_p \lambda_p}] - s W[\mu, \lambda, \dots, W_{\mu_p \lambda_p}] - \\ + 2p X^\mu W_\mu [\mu, w_\lambda, W_{\mu_2 \lambda_2}, \dots, W_{\mu_p \lambda_p}] &= -s W[\mu, \lambda, \dots, W_{\mu_p \lambda_p}] \end{aligned}$$

of

$$17.46) \quad G \overset{2p}{\mathcal{Y}} - 2p \bar{G} \overset{2p-1}{\mathcal{Y}} = -s \overset{2p}{\mathcal{Y}}$$

Is dus  $g$  van de index 2, d.w.z. is  $\overline{g}^{2p-1} = 0$  dan is  $s = -g$ . Voldoet  $g$  aan de vergelijking (verg. (17.28))

$$17.47) \quad g^{2p} - 2p \overline{g}^{2p-1} = 0$$

dan is  $s = 0$  blijkens (17.46).  $g$  heeft dan kennelijk de index 1.

Tenslotte kan  $g$  de index 1 hebben en niet aan (17.47) voldoen. Kiest men  $g$  dan laat zich uit (17.38) eerst  $X^k$  bepalen op een additief stuk na welks overschuiving met  $W_{\mu\lambda}$  en dus ook met  $u_\lambda$  nul is. Bijgevolg is dan ook  $g + s$  en daarmee  $s$  bekend. Zij de algemene oplossing van (17.38) voor  $g = 0$  en dus  $s = 0$  aangeduid met  $\overline{X}^k$  dan is weer de algemene oplossing van (17.38) van de vorm

$$17.48) \quad X^k = \overline{X}^k + \overline{X}^k$$

waarin  $\overline{X}^k$  een willekeurige niet speciale oplossing van (17.38) is. Er zijn 4 gevallen:

- (0)  $g = \text{constant}$ ;  $s = -g$ ;  $X = \overline{X}$ , stroomlijnen in dragers (rotatiedragers)
- 17.49) (1)  $g$  index 2;  $s = -g$
- (2)  $g$  index 1, oplossing van (17.47);  $s = 0$
- (3)  $g$  index 1, geen oplossing van (17.47);  $s$  uit  $g$  af te leiden.

Voor  $R=n$  vervalt weer het geval (0). We blijven bij dit geval, en gebruiken weer de novatievergelijking van § 13. De vergelijkingen (17.38) krijgen dan weer de vorm (17.41) en deze gaan over in

$$17.50) \quad X^\lambda = \frac{\partial g}{\partial w_\lambda} ; \quad X^{(k)} = - \frac{\partial g}{\partial \xi^k}$$

terwijl (17.46) overgaat in

$$17.51) \quad w_\lambda \frac{\partial g}{\partial w_\lambda} = g + s$$

De meest algemene  $C_2$ -transformatie in  $\xi^k$ ,  $w_\lambda$  heeft dus de vorm

$$17.52) \quad \begin{array}{l} \delta \xi^k = \frac{\partial g}{\partial w_k} dt \\ \delta w_\lambda = - \frac{\partial g}{\partial \xi^\lambda} dt \end{array} \quad \begin{array}{l} \delta(w_\lambda d\xi^\lambda) = ds dt \\ w_\lambda \frac{\partial g}{\partial w_\lambda} = g + s \end{array}$$

waarin  $g$  een willekeurige functie van  $\xi^k$ ,  $w_\lambda$  is. Er zijn drie gevallen:

-56-

- 17.53) (1)  $\mathcal{G}$  homogeen graad 0 in  $w_\lambda$ ;  $s = -\mathcal{G}$ ; speciale  $C_2$ -transformatie,  $\mathcal{F}^{\xi^k}$  ligt namelijk in de  $(n-1)$ -richting van  $w_\lambda$
- (2)  $\mathcal{G}$  homogeen van de graad 1 in  $w_\lambda$ ;  $s = 0$ ; algemene  $C_3$ -transformatie
- (3)  $\mathcal{G}$  willekeurig;  $s = w_\lambda \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial w_\lambda} - \mathcal{G}$ ; algemene  $C_2$ -transformatie.

De  $C_3$ -transformaties zijn in (17.22, 33, 43 en 52) valdeelf mee voor de dag gekomen.

Hier volgt een overzicht van alle infinitesimale contacttransformaties:

$$\varepsilon = 0$$

$$\delta \xi^k = \frac{\partial F}{\partial w_k} dt$$

$$\delta w_\lambda = - \frac{\partial F}{\partial \xi^\lambda} dt + \mu w_\lambda dt$$

$$\delta(w_\lambda d\xi^\lambda) = \{(\tilde{F}) - F\} dt + \mu dt w_\lambda d\xi^\lambda$$

$$(F) \stackrel{\text{def}}{=} w_\lambda \frac{\partial F}{\partial w_\lambda}$$

$$C_1: (\tilde{F}) = F; \mu \text{ willekeurig} \\ (\tilde{F} \text{ en } \mu \text{ geven})$$

$$C_2: \mu = 0; \tilde{F} \text{ willekeurig} \\ (\text{alleen } \tilde{F} \text{ geven})$$

$$C_3: (\tilde{F}) = F; \mu = 0 \\ (\text{alleen } \tilde{F} \text{ geven})$$

$$\varepsilon = 1$$

$$\delta \xi^0 = -w_\lambda \frac{\partial F}{\partial w_\lambda} dt + (F + s) dt$$

$$\delta \xi^k = \frac{\partial F}{\partial w_k} dt$$

$$\delta w_\lambda = - \frac{\partial F}{\partial \xi^\lambda} dt + w_\lambda \frac{\partial F}{\partial \xi^0} dt$$

$$\delta(d\xi^0 + w_\lambda d\xi^\lambda) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial \xi^0} dt (d\xi^0 + w_\lambda d\xi^\lambda) + ds dt.$$

$$C_1: s = 0; \tilde{F} \text{ willekeurig}; \mu = \frac{\partial F}{\partial \xi^0} \\ (\text{alleen } \tilde{F} \text{ geven})$$

$$C_2: \frac{\partial F}{\partial \xi^0} = 0; s \text{ willekeurig} \\ (\tilde{F} \text{ en } s \text{ geven})$$

$$C_3: s = 0; \mu = \frac{\partial F}{\partial \xi^0} = 0 \\ (\text{alleen } \tilde{F} \text{ geven})$$

$\tilde{F}$ ,  $\mu$  en  $s$  heten voorzover zij gegeven moeten worden om de contacttransformatie vast te leggen de characteristische functies der infinitesimale  $C$ -transformatie.

-58-

§ 18 Haaksymbolen van Poisson en van Lagrange

Zijn  $v_1$  en  $v_2$  functies van de  $\xi^k$  en  $w_\lambda$  dan is

18.1)

$$(v_1, v_2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial v_1}{\partial w_\lambda} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial \xi^\lambda} - \frac{\partial v_2}{\partial w_\lambda} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial \xi^\lambda} = -(v_1, v_2)$$

het haaksymbool van Poisson. Is  $(v_1, v_2) = 0$  dan heten  $v_1$  en  $v_2$  in involutie.

Zijn  $\xi^k$  en  $w_\lambda$  functies van  $v_1, v_2$  en nog andere variabelen, dan is

18.2)

$$\{v_1, v_2\} = \frac{\partial w_1}{\partial v_1} \frac{\partial \xi^1}{\partial v_2} - \frac{\partial w_2}{\partial v_2} \frac{\partial \xi^1}{\partial v_1}$$

het haaksymbool van Lagrange. Zijn er  $2n$  variabelen

$v_b$  ;  $b = 1, \dots, 2n$  dan volgt gemakkelijk

18.3)

$$(v_a, v_c) \{v_b, v_c\} = \delta_{ab} ; a, b, c = 1, \dots, 2n$$

Door uitschrijven bewijst men de identiteit van Jacobi voor ( ) :

18.4)

$$(v_1, (v_2, v_3)) + (v_2, (v_3, v_1)) + (v_3, (v_1, v_2)) = 0$$

Een dergelijke identiteit geldt niet voor { } .

Bekijk nu een willekeurige transformatie in  $\xi^k, w_\lambda$  :

18.5)

$$\begin{aligned} \xi^k &= \phi^k(\xi^k, w_\lambda) \\ w_\lambda &= \psi_\lambda(\xi^k, w_\lambda) \end{aligned}$$

die omkeerbaar verondersteld wordt. Dit is dan en alleen dan een  $C_2$ -transformatie indien er een functie  $\Omega(\xi^k, w_\lambda)$  bestaat zo dat

18.6)

$$w_\lambda d\xi^\lambda = w_\lambda d\xi^\lambda + d\Omega(\xi^k, w_\lambda)$$

of ook

18.7)

$$w_\mu \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \xi^\lambda} = w_\lambda + \frac{\partial \Omega}{\partial \xi^\lambda} ; w_\mu \frac{\partial \xi^\mu}{\partial w_\lambda} = \frac{\partial \Omega}{\partial w_\lambda}$$

Door differentiatie van (18.7) vindt men

18.8)

$$\{\xi^\mu, \xi^k\} = 0$$

$$\{w_\lambda, \xi^k\} = \delta_\lambda^k$$

$$\{w_\lambda, w_\mu\} = 0$$

Deze vergelijkingen brengen tot uitdrukking dat in de  $X_{2n}$  der  $\xi^k, w_\lambda$  de vector met de  $2n$  kentallen:

18.9)  $w_\mu \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \xi^\lambda} = w_\lambda$  ;  $w_\mu \frac{\partial \xi^\mu}{\partial w_k} = -5.9 -$

geen rotatie heeft. Maar dat is precies wat (18.7) ook uitdrukt. Bijgevolg is ook (18.8) een stelsel condities, n.e.v. opdat (18.5) een  $C_2$ -transformatie is. De matrix van de Lagrange-haken van  $\xi', \dots, \xi^n, w, \dots, w_n$  in deze volgorde is

18.10) 
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & & & \\ & 0 & -1 & & \\ & & 0 & -1 & \\ & & & 0 & -1 \\ 0 & +1 & & & \\ +1 & 0 & & & \\ & & 0 & +1 & \\ & & +1 & 0 & \\ & & & & 0 & +1 \\ & & & & +1 & 0 \end{vmatrix}$$

Dus heeft de omkering dezelfde vorm en dat wil zeggen (ingevolge (18.3)) dat

18.11) 
$$\begin{aligned} (\xi^\mu, \xi^k) &= 0 \\ (w_\lambda, \xi^k) &= \delta_\lambda^k \\ (w_\lambda, w_\mu) &= 0 \end{aligned}$$

eveneens een stelsel van n.e.v. voorwaarden is opdat (18.5) een  $C_2$ -transformatie is.

Gebruik makende van (18.8) en (18.11) kan men eenvoudig door uitschrijven bewijzen dat voor twee willekeurige  $v_1$  en  $v_2$  de beide haaksymbolen  $(v_1, v_2)$  en  $\{v_1, v_2\}$  invariant zijn voor  $C_2$ -transformaties van  $\xi^k, w_\lambda$ .

We werken bijna altijd met de Poissonse haaksymbolen. De haaksymbolen van Lagrange komen minder voor, tengevolge van (18.3) zijn zij echter soms gemakkelijk voor berekeningen.

Naast  $(F, G)$  treedt nog een ander haaksymbool op

18.12) 
$$(F) = w_\lambda \frac{\partial F}{\partial w_\lambda}$$

Dit symbool is niet invariant voor  $C_2$ -transformaties maar wel voor  $C_3$ -transformaties van  $\xi^k, w_\lambda$ . Voor de haaksymbolen met betrekking tot  $\xi^k, w_\lambda$  schrijven we  $(F, G)$  en  $(F)'$ , dus

18.13) 
$$\begin{aligned} (F, G)' &= (F, G) \text{ als } \xi^k, w_\lambda \rightarrow \xi'^k, w'_\lambda \text{ een } C_2\text{-transf. is} \\ (F)' &= (F) \text{ als } \xi^k, w_\lambda \rightarrow \xi'^k, w'_\lambda \text{ een } C_3\text{-transf. is} \end{aligned}$$

Meer algemeen geldt het volgende:

| 18.14)                   | $C_1$ -transformatie                                                         | $C_2$ -transformatie               | $C_3$ -transformatie     |
|--------------------------|------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|--------------------------|
| $w_\lambda d\xi^\lambda$ | $\mu w_\lambda d\xi^\lambda$                                                 | $w_\lambda d\xi^\lambda + d\Omega$ | $w_\lambda d\xi^\lambda$ |
| $(F, G)$                 | $\frac{1}{\mu} (F, G) - (F)'(\xi, \frac{1}{\mu}) + (\xi)'(F, \frac{1}{\mu})$ | $(F, G)$                           | $(F, G)$                 |
| $(F)$                    | $\frac{(F)}{1 + (\log \mu)} = (F)(1 - (\log \mu)')$                          | $(F) + (\Omega, F)$                | $(F)$                    |

# 19. Contacttransformaties en de integratietheorie van Hamilton-Jacobi.

De stand van een mechanisch stelsel met  $n$  graden van vrijheid kan gegeven worden door  $n$  getallen  $q^k$ ;  $k=1, \dots, n$ . We onderstellen hier dat bij ieder stel waarden van  $q^k$  een mogelijke stand van het stelsel hoort. De  $q^k$  heten de noodzakelijke coördinaten en de afgeleiden

$$(19.1) \quad \dot{q}^k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dq^k}{dt}$$

heten de fluxies. De snelheden van alle deeltjes van het stelsel zijn uitdrukbaar in  $\dot{q}^k$  en  $q^k$ . Dus is ook het totale arbeidsvermogen van beweging een functie van de  $q^k$ ,  $\dot{q}^k$  en  $t$

$$(19.2) \quad T = T(q^k, \dot{q}^k, t)$$

We beschouwen hier alleen zulke stelsels waarvoor de bewegingsvergelijkingen zich laten schrijven in de vorm

$$(19.3) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0.}$$

waarin  $L$  een voor het stelsel karakteristieke en bekende functie van de  $q^k$ ,  $\dot{q}^k$  en  $t$  is (functie van Lagrange). De vergelijkingen (19.3) heten de vergelijkingen van Lagrange.

Nu is

$$(19.4) \quad \begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial q^k} dq^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} d\dot{q}^k + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) dq^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} d\dot{q}^k + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= d\left(\dot{q}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Schrijft men dus

$$(19.5) \quad \boxed{p_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}} \quad (p_k \text{ heten de } \underline{\text{impulsies}})$$

bij welke differentiatie dus  $q^k$  en  $t$  constant worden gehouden, dan volgt

$$(19.6) \quad \boxed{dH = -\frac{\partial L}{\partial t} dt}$$

met

$$(19.7) \quad \boxed{H \stackrel{\text{def}}{=} p_k \dot{q}^k - L}$$

$H$  heet de Hamiltonsche functie van het stelsel. Zoals  $H$  hier ontstaat is  $H$  een functie van  $q^k$ ,  $\dot{q}^k$  en  $t$

In het speciale geval dat  $L$  niet van zulke mechanische stelsels dat  $t$  (19.6):

19.8)  $H = \text{constant}$

Dit is een vergelijking in  $q^k$  en  $\dot{q}^k$  waaraan alle oplossingen van de differentiaalvergelijkingen van de tweede orde (19.3) moeten voldoen. Dit heet een eerste integraal van de bewegingsvergelijkingen (19.3).

Men onderstelt nu verder dat zich de  $\dot{q}^k$  uit (19.5) als functies van  $p_\lambda$  en  $t$  op laten lossen. Dan mogen de  $q^k$ ,  $p_\lambda$  even goed als de  $q^k$ ,  $\dot{q}^k$  als onbekenden van het probleem worden opgevat. Uit (19.4,5) volgt nu

19.9) 
$$dL = p_\lambda dq^\lambda + q^\lambda dp_\lambda + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

en dus ingevolge (19.7)

19.10) 
$$\begin{aligned} dH &= q^\lambda dp_\lambda + p_\lambda dq^\lambda - p_\lambda dq^\lambda - p_\lambda d\dot{q}^k - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= q^\lambda dp_\lambda - p_\lambda d\dot{q}^k - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Daar echter voor  $H$ , beschouwd als functie van  $p_\lambda$ ,  $q^k$  en  $t$  ook geldt

19.11) 
$$dH = \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} dp_\lambda + \frac{\partial H}{\partial q^k} dq^k + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

volgt

19.12) 
$$(a) \quad \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} = \dot{q}^\lambda \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial q^k} = -\dot{p}_k$$

(b)  $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt}$  (c)  $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

De vergelijkingen (19.12a) heten de kanonische vergelijkingen van Hamilton. (19.12b) is een consequentie van (19.12a). In (19.12c) moet men bedenken dat links  $p_\lambda$  en  $q^k$  constant gehouden worden en rechts  $q^k$  en  $\dot{q}^k$ .

(19.12a) is equivalent met (19.3):

19.13) 

|                            |
|----------------------------|
| Vergelijkingen v. Lagrange |
|----------------------------|

 $\equiv$ 

|                            |
|----------------------------|
| Vergelijkingen v. Hamilton |
|----------------------------|

  
variabelen:  $q^k, \dot{q}^k, t$  variabelen:  $p_\lambda, q^k, t$

Merk op dat  $H$  nooit homogeen v.d. eerste graad in de  $p_\lambda$  kan zijn want dan zou uit (19.7) volgen

19.14) 
$$L = p_\lambda \dot{q}^\lambda - p_\lambda \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} = 0.$$

(19.12c) drukt uit: Bevat  $L$  de tijd niet expliciet, dan  $H$  evenmin. Inderdaad volgt uit (19.12a) indien  $H$  de tijd niet expliciet

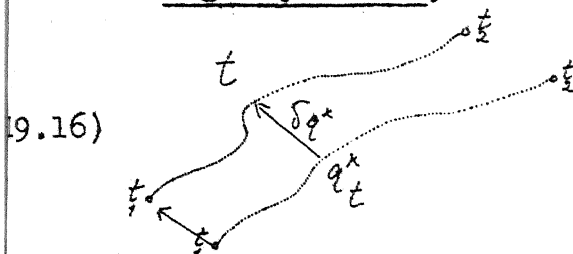
19.15) 
$$dH = q^\lambda dp_\lambda - p_\lambda dq^\lambda = (\dot{q}^\lambda p_\lambda - p_\lambda \dot{q}^\lambda)$$

Men noemt de ruimte der  $q^k$  de coördinatenruimte  $X_n$ . Ieder punt der  $X_n$  stelt een mogelijke stand van het stelsel voor. De beweging van het stelsel uitgaande van beginstand en beginimpulsies  $q^k = q_0^k, p_k = p_0^k$  voor  $t = t_0$  beeldt zich af op een kromme van  $X_n$  gaande door het punt  $q^k$  en deze kromme, de baan, wordt in de tijd doorlopen. Door elk punt van  $X_n$  gaan  $\infty^n$  verschillende banen, immers men kan de waarden  $p_k$ , of wat op hetzelfde neerkomt de  $\frac{dq^k}{dt}$  willekeurig voorschrijven voor  $t = 0$ .

Naast de  $X_n$  heeft men de filmruimte  $X_{n+1}$  van de  $q^k$  en  $t$ . Daarin beeldt zich de werkelijke beweging af als een kromme, de wereldlijn. Bij gegeven  $q^k, t_0$  hoort bij elk stel waarden  $q^k$  ten tijde  $t = 0$  één wereldlijn. Er zijn dus door het punt  $q^k, t_0$  juist  $\infty^n$  wereldlijnen en het ligt voor de hand te onderstellen dat van al die wereldlijnen er maar één of althans maar een eindig aantal is dat door een tweede gegeven punt  $q^k, t_1$  gaat.

Voorbeeld: Massapunt in zwaartekrachtveld  $n=3$ . Door een vast punt gaan  $\infty^3$  kogelbanen. In de filmruimte zijn er dus door elk punt  $\infty^3$  wereldlijnen. Tussen 2 punten in de filmruimte is er één enkele wereldlijn.

Beschouw in de coördinatenruimte twee punten  $q^k, q_2^k$  verbonden door een mogelijke baan, doorlopen tussen  $t_1$  en  $t_2$ . Varieer de baan



$$q^k \rightarrow q^k + \delta q^k$$

en voeg aan corresponderende punten dezelfde tijden toe. De gevarieerde kromme hoeft geen mogelijke baan te zijn. Bepaal de variatie van  $\int L dt$  tussen  $t_1$  en  $t_2$ . Aangezien  $t$  constant gehouden wordt bij de variatie is

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q^k} \delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta \dot{q}^k \right) dt \\ 19.17) \quad &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) \delta q^k + \frac{\partial L}{\partial q^k} \delta q^k \right\} dt = \int_{t_1}^{t_2} d \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta q^k \right) \\ &= \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right)_{t=t_2} \delta q_2^k - \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right)_{t=t_1} \delta q_1^k \end{aligned}$$

Bevolgtrekkingen:

1. Zijn  $\delta q_1^k = 0$  en  $\delta q_2^k = 0$  dan is  $\int L dt = 0$ . D.w.z. de banen zijn die krommen waarover de integraal  $\int L dt$  voor ieder baanstuk extreem is. (Bij verdere differentiatie blijkt dat er werkelijk een minimum optreedt).

2. Zijn  $q^k, t$  en  $q_2^k, t$  dicht genoeg bij elkaar dan is er maar één wereldlijn tussen. Er zijn dus  $\infty^{2n}$  wereldlijnen.

3. De Hamiltonsche variatievergelijking

19.18)

$$\boxed{\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0}$$

equivalent met de vergelijkingen van Lagrange (19.3) en dus ook met het stelsel kanonische vergelijkingen (19.12a). Inderdaad volgt (19.3) uit (19.18) zoals men direct uit de herleiding (19.17) ziet.

De filmruimte bevat nog meer dan de  $\infty^{2n}$  wereldlijnen. Bij elk punt hoort namelijk ook nog de uitdrukking

$$(19.19) \quad L dt = -H dt + p_\lambda dq^\lambda$$

dit wordt een Pfaff'sche vorm in de variabelen  $q^k$  en  $t$  zodra de  $H$  en de  $p_\lambda$  in  $q^k$  en  $t$  zijn uitgedrukt.  $H$  is al uitgedrukt in  $p_\lambda$ ,  $q^k$  en  $t$  dus het komt er op neer de  $p_\lambda$  in  $q^k$  en  $t$  uitgedrukt te krijgen

$$(19.20) \quad p_\lambda = f_\lambda(q^k, t)$$

dit zijn blijkbaar  $n$  eerste integralen van het stelsel differentiaalvergelijkingen van de eerste orde. Dus:

Beschikt men over  $n$  eerste integralen van het probleem waaruit de  $p_\lambda$  (en dus ook de  $\dot{q}^k$ ) als functies van  $q^k$  en  $t$  kunnen worden opgelost dan bepaalt  $L dt$  in de filmruimte een bepaald covariant veld.

Heeft men  $L dt$  alleen maar op een factor na gegeven dan is het zeer merkwaardig dat  $L dt$  toch al bekend is. Stel namelijk dat we vinden dat

$$(19.21) \quad L dt =: \beta_0 dt + \beta_\lambda dq^\lambda$$

waarin  $\beta_0$  en  $\beta_\lambda$  bekende functies van  $q^k$  en  $t$  zijn. Dan vinden we dat

$$(19.22) \quad H = -\alpha \beta_0 \quad ; \quad p_\lambda = \alpha \beta_\lambda$$

waarin nu  $\alpha$  nog onbekend is. Maar aangezien  $H$  een bekende functie van  $p_\lambda$ ,  $q^k$  en  $t$  is

$$(19.23) \quad H = H(p_\lambda, q^k, t)$$

volgt de  $\alpha$ -vergelijking  $-\alpha \beta_0 = H(\alpha \beta_\lambda, q^k, t)$

(19.24)

uit welke vergelijking  $\alpha$  steeds kan worden opgelost (aantal verschillende oplossingen mogelijk) omdat immers de functie  $H$  niet homogeen van de eerste orde in  $p_\lambda$  mag zijn.

Gevolgtrekkingen:

1. Bij elke richting in een punt der filmruimte hoort één enkele  $n$ -richting en één enkele covariante vector met die  $n$ -richting waarvan de bijbehorende vorm  $L dt$  is.

2. Geeft men in een punt der filmruimte een  $n$ -richting door de verhoudingsgetallen  $\beta_0 : \beta_1 : \dots : \beta_n$  dan geeft iedere reële oplossing der  $\alpha$ -vergelijking een covariante vector met kentallen  $-H, p_\lambda$

en aangezien men  $q^k$  in  $p_\lambda$ ,  $q^k$  en  $t$  kan uitdrukken liggen dan ook in dat punt zoveel verschillende oplossingen voor de verhoudingsgetallen  $dq^1 : dq^2 : \dots : dq^n : dt$  d.w.z. zoveel mogelijke richtingen van wereldlijnen vast als het aantal reële oplossingen der  $\alpha$ -vergelijking bedraagt.

3. De richting van een wereldlijn in een punt en de  $\eta$ -richting die daarbij hoort heten aan elkaar toegevoegd. De toegevoegde  $\eta$ -richting is eenduidig bepaald, de toegevoegde richting niet.

4. Iedere wereldlijn is bezet met  $\eta$ -richtingen (zelfs met covariante vectoren). Een punt +  $\eta$ -richting in dat punt heet een element. Een punt + covariante vector in dat punt heet een vectorelement. Iedere wereldlijn is dus een elementenrij en zelfs een vectorelementenrij.

Elke elementenrij is volkomen bepaald door één punt en de richting van de wereldlijn aldaar.

Elk element behoort tot zoveel elementenrijen als het aantal reële wortels der  $\alpha$ -vergelijking bedraagt.

Ieder element kan voorkomen als onderdeel van een elementenrij. Van de vectorelementen zijn echter alleen die mogelijk die voldoen aan de vergelijking (19.23), dat zijn er in totaal  $\infty^{2n+1}$  van de  $\infty^{2n+2}$  bestaande, te weten  $\infty^n$  in elk punt van de filmruimte. Hoort een vectorelement hiertoe dan zeker niet het vectorelement dat ontstaat door in dat punt de vector met een getal te vermenigvuldigen. Dit is de reden dat ieder element zijn vectorelement (één- of meerduidelig) bepaalt.

5. Heeft men  $n$  eerste integralen waaruit zich de  $p_\lambda$  als functies van  $q^k$  en  $t$  laat oplossen, dan heeft men in elk punt der filmruimte een covariante vector en bovendien één daarbij behorende wereldlijnricting. Men heeft dus precies een congruentie van wereldlijnen, d.w.z. wereldlijnen waarvan er door elk punt (v.d. filmruimte) precies één gaat. Iedere wereldlijn is tegelijk elementenrij zodat men ook heeft een congruentie van elementenrijen.

Vóór opmerking : een congruentie van wereldlijnen is in het algemeen niet zo dat de  $\eta$ -richtingen zich aaneensluiten tot  $\infty^1 \chi_m \gamma$ . Daarvoor zou de vector  $-H, p_\lambda$  de gelijkvormigheidsklasse 1 moeten hebben (d.w.z. op factor na gradientvector moeten zijn).

6. Meetkundige betekenis der kanonische vergelijkingen van Hamilton.

Beschouw in de filmruimte alle  $\infty^{2n+1}$  mogelijke vectorelementen vastgelegd door de vergelijking (19.23).  $H$  is dus als functie van  $p_\lambda$ ,  $q^k$  en  $t$  gegeven gedacht. De eerste vergelijking van Hamilton

$$19.25) \quad \frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \text{bekende functie van } p_\lambda, q^k \text{ en } t$$

legt dan de voortschrijdingsrichting vast van een wereldlijn door  $q^k, t$  is ter plaatse de  $p_\lambda = \dot{p}_\lambda$  (dat is de toegevoegde  $n$ -richting) gegeven is. De tweede vergelijking

$$(19.26) \quad \frac{dp_\lambda}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q^\lambda} = \text{bekende functie van } p_\lambda, q^k \text{ en } t$$

legt vervolgens de verandering van  $p_\lambda$  vast bij een verplaatsing van  $q^k$  in de richting van de wereldlijn die door (19.25) werd vastgelegd. Beide vergelijkingen samen gaven dus, populair gesproken, een soort breiproces aan, waarbij men uitgaande van  $p_\lambda, q^k, t$  de hele elementenrij af kan breien.

Bij de pogingen de kanonische vergelijkingen te integreren ligt het voor de hand te trachten de variabelen  $p_\lambda, q^k$  te vervangen door andere variabelen  $P_\lambda, Q^k$  functies van  $p_\lambda, q^k, t$  zodat de vergelijkingen hun vorm bewaren. In plaats van  $H(p_\lambda, q^k, t)$  zal dan in het algemeen een andere functie  $\mathcal{K}(P_\lambda, Q^k, t)$  gaan optreden en men kan proberen die nieuwe functie zo eenvoudig te maken dat de integratie vlot verloopt.

Naast de coördinatenruimte  $X_n$  der  $q^k$  beschouwen we nu ook de fasenruimte (Gibbs)  $X_{2n}$  van  $p_\lambda, q^k$ . In de  $X_n$  zijn de kanonische vergelijkingen equivalent met de variatievergelijking van Hamilton.

$$(19.27) \quad \delta \int L dt = \delta \int (p_\lambda \dot{q}^\lambda - H(p_\lambda, q^k, t)) dt = 0.$$

waarbij de baan gevarieerd wordt in de  $X_n$ . In de fassenruimte bepalen de  $p_\lambda$  en  $q^k$  als functie van  $t$  eveneens een kromme, de fasenbaan. Nu zijn de kanonische vergelijkingen evenzeer gelijkwaardig met (19.27) als men de integraal neemt langs een fassenbaan en de variatie voltrekt in de  $X_{2n}$  (bij eveneens vaste eindpunten). Inderdaad in de  $X_{2n}$  zijn  $p_\lambda$  en  $q^k$  onafhankelijke variabelen en men krijgt dus ( $t$  varieert weer niet mee)

$$(19.28) \quad \begin{aligned} & \delta \int (p_\lambda \dot{q}^\lambda - H(p_\lambda, q^k, t)) dt = \\ & = \int \delta p_\lambda \dot{q}^\lambda + p_\lambda \delta d\dot{q}^\lambda - \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} \delta p_\lambda dt - \frac{\partial H}{\partial q^k} \delta q^k dt = \\ & = \int \left\{ \left( \dot{q}^\lambda - \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} \right) \delta p_\lambda - \left( p_\lambda + \frac{\partial H}{\partial q^k} \right) \delta q^k \right\} dt + \int d(p_\lambda \delta q^\lambda) dt \end{aligned}$$

waarin de laatste term nul wordt door de grenscondities ( $\delta q^k = 0$ ) en in de eerste term  $p_\lambda$  en  $q^k$  onafhankelijk gevarieerd mogen worden. Inderdaad is de variabele dus dan en slechts dan nul wanneer de kanonische vergelijkingen (19.12a) gelden.

Van de nieuw in te voeren variabelen

$$(19.29) \quad \begin{aligned} P_\lambda &= P_\lambda(p, q, t) & \mathcal{K} &= \mathcal{K}(P, Q, t) \\ Q^k &= Q^k(p, q, t) \end{aligned}$$

an we nu eisen dat

$$19.30) \quad \delta \int (\mathcal{P}_\lambda \dot{q}^\lambda - \mathcal{R}(p, q, t)) dt = 0.$$

en gevolg is van (19.27) en (19.29). Dat wil zeggen, indien

$$19.31) \quad \psi(p, q, t) \stackrel{\text{def}}{=} p_\lambda \dot{q}^\lambda - H(p, q, t) - \mathcal{P}_\lambda \dot{q}^\lambda + \mathcal{R}(p, q, t)$$

an eisen we dat

$$19.32) \quad \delta \int \psi(p, q, t) dt = 0.$$

d.w.z. dat  $\int \psi(p, q, t) dt$  voor alle krommen tussen twee willekeurig gekozen punten dezelfde alleen van de ligging dier punten afhangende waarde heeft. Maar dat kan alleen wanneer  $\psi dt$  een volledige differentiaal, d.w.z. dat er een functie  $\Phi(p, q, t)$  bestaat zodat

$$19.33) \quad \psi = \frac{d\Phi}{dt}.$$

it gesubstitueerd in (19.31) geeft

$$19.34) \quad -H dt + p_\lambda dq^\lambda = -\mathcal{R} dt + \mathcal{P}_\lambda dq^\lambda + d\Phi(p, q, t)$$

en dat betekent niets anders dan dat de transformatie der  $2n+2$  variabelen  $-H, p_\lambda; t, q^\lambda$  in  $-\mathcal{R}, \mathcal{P}_\lambda; t, \mathcal{Q}^\lambda$  een contacttransformatie van de tweede soort is. Om de regel van §16 te kunnen gebruiken in dit geval waar de variabele  $t$  niet verandert schrijven we in plaats van (19.34)

$$19.35) \quad ds + (\mathcal{R} - H) dt + p_\lambda dq^\lambda = dS + 0 \cdot dT + \mathcal{P}_\lambda d\mathcal{Q}^\lambda$$

of

$$19.36) \quad ds + p_\alpha dq^\alpha = dS + \mathcal{P}_\alpha d\mathcal{Q}^\alpha; \quad \begin{matrix} \alpha = 0, 1, \dots, n \\ q^0 = t; p_0 = \mathcal{R} - H \\ \mathcal{Q}^0 = T; \mathcal{P}_0 = 0. \end{matrix}$$

en construeren volgens de regel II op blz. 45 een  $C_0$ -transformatie voor de variabelen  $S, p_\alpha, q^\alpha \rightarrow S, \mathcal{P}_\alpha, \mathcal{Q}^\alpha$  en wel zo dat  $\mathcal{P}_0 = 0$  wordt. Verleel dus de  $p_\alpha$  en  $q^\alpha$  in

$$19.37) \quad \begin{matrix} p_0, q^0 \\ p_a, q^a \\ p_x, q^x \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} a = 1, \dots, r_1 \\ x, y = r_1 + 1, \dots, n \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \mathcal{P}_0, \mathcal{Q}^0 \\ \mathcal{P}_b, \mathcal{Q}^b \\ \mathcal{P}_y, \mathcal{Q}^y \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} b = 1, \dots, r_2 \\ y = r_2 + 1, \dots, n \end{matrix}$$

en construeer een functie  $V$  van

$$19.38) \quad q^0, q^a, p_x, \mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^b, \mathcal{P}_y$$

Dan luiden de vergelijkingen voor de meest algemene contacttransformatie

$$\frac{\partial V}{\partial q^0} = -p_0 \quad \frac{\partial V}{\partial q^0} = p_0$$

$$19.39) \quad \frac{\partial V}{\partial q^a} = -p_a \quad \frac{\partial V}{\partial q^b} = p_b$$

$$\frac{\partial V}{\partial p_x} = q^x \quad \frac{\partial V}{\partial p_y} = -q^y$$

f, wanneer  $V$  onafhankelijk wordt gekozen van  $Q_0$

$$p_a = -\frac{\partial V}{\partial q^a} \quad p_b = \frac{\partial V}{\partial q^b}$$

$$19.40) \quad q^x = \frac{\partial V}{\partial p_x} \quad q^y = -\frac{\partial V}{\partial p_y}$$

$$R = H - \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$a = 1, \dots, \bar{t}_1; \quad x = \bar{t}_1 + 1, \dots, n \mid b = 1, \dots, \bar{t}_2; \quad y = \bar{t}_2 + 1, \dots, n$$

Nemen we b.v.  $\bar{t}_1 = n$   $\bar{t}_2 = n$  dan ontstaat

$$19.41) \quad p_\lambda = -\frac{\partial V}{\partial q^\lambda}; \quad p_\lambda = \frac{\partial V}{\partial q^\lambda}; \quad R = H - \frac{\partial V}{\partial t}$$

en we hebben inderdaad

$$19.42) \quad p_\lambda dq^\lambda - p_\lambda d\bar{q}^\lambda + (R-H)dt = -\frac{\partial V}{\partial q^\lambda} dq^\lambda - \frac{\partial V}{\partial \bar{q}^\lambda} d\bar{q}^\lambda - \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

$$= -dV = \text{voll. differentiaal}$$

Nemen we daarentegen  $t_1 = n$ ,  $t_2 = 0$  dan ontstaat

$$19.43) \quad p_\lambda = -\frac{\partial V}{\partial q^\lambda}; \quad q^x = -\frac{\partial V}{\partial p_x}; \quad R = H - \frac{\partial V}{\partial t}$$

en inderdaad is dan

$$19.44) \quad p_\lambda dq^\lambda - p_\lambda d\bar{q}^\lambda + (R-H)dt = -\frac{\partial V}{\partial q^\lambda} dq^\lambda - d(p_\lambda q^\lambda)$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial p_x} dp_x - \frac{\partial V}{\partial t} dt = -d(V + p_\lambda q^\lambda) = \text{volledige differentiaal}$$

Trachten we nu voor het eerste geval  $V(q^k, q^x, t)$  zo te krijgen dat  $R = 0$  wordt. We schrijven  $R$  inplaats van  $-V$ . Dan is voor deze  $R(q_\lambda, q^k) \in \mathcal{Q}, t$

$$19.45) \quad p_\lambda = \frac{\partial R}{\partial q^\lambda}; \quad p_\lambda = -\frac{\partial R}{\partial q^x}$$

en de voorwaarde voor  $R$  is

$$19.46) \quad \frac{\partial R}{\partial t} = -H(p_\lambda, q^k, t)$$

of bij substitutie van (19.45)

$$19.47) \quad \frac{\partial R}{\partial t} = -H\left(\frac{\partial R}{\partial q^\lambda}, q^\lambda, t\right)$$

waarbij men moet bedenken dat  $H$  bij een gegeven mechanisch probleem een gegeven functie van  $p_\lambda$ ,  $q^\lambda$  en  $t$  is.

(19.47) is de differentiaalvergelijking van Hamilton-Jacobi. In deze vergelijking spelen de  $q^\lambda$  de rol van  $n$  onafhankelijke parameters, er wordt immers in de vergelijking (19.47) naar deze  $q^\lambda$  helemaal niet gedifferentieerd.

Stel dus dat we een oplossing vinden van de vergelijking van Hamilton Jacobi die  $n$  onafhankelijke integratieconstanten  $\mathcal{C}_\lambda$  bevat, dan gaan de kanonische vergelijkingen door de contacttransformatie

$$19.48) \quad p_\lambda = \frac{\partial R}{\partial q^\lambda}; \quad P_\lambda = -\frac{\partial R}{\partial \mathcal{C}^\lambda}$$

over in kanonische vergelijkingen met  $P_\lambda$ ,  $\mathcal{C}^\lambda$  en  $\mathcal{R} = 0$  en deze vergelijkingen luiden dus

$$19.49) \quad \frac{dP_\lambda}{dt} = 0; \quad \frac{d\mathcal{C}^\lambda}{dt} = 0$$

met de oplossingen

$$P_\lambda(p_\lambda, q^\lambda, t) = \text{const.}$$

19.50)

$$\mathcal{C}^\lambda(p_\lambda, q^\lambda, t) = \text{const.}$$

waaruit de  $p_\lambda$  en  $q^\lambda$  als functies van  $t$  kunnen worden gevonden.

Men kan ook zonder gebruik te maken van de theorie der contacttransformaties tot de vergelijkingen van Hamilton-Jacobi komen. Deze tweede methode geeft een inzicht in de meetkundige betekenis van de functie

We gaan terug naar de filmruimte. Door twee punten van de filmruimte die voldoende dicht bij elkaar liggen gaat slechts één wereldlijn.

De integraal

$$19.51) \quad \overset{\circ}{R} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{q_0, t_0}^{q, t} \mathcal{L} dt$$

is dus een functie van  $q_0^\lambda$ ,  $t_0$ ,  $q^\lambda$  en  $t$ . Nu is blijkens (19.17) bij variatie

$$19.52) \quad \delta \overset{\circ}{R} = p_k dq^\lambda - p_\lambda dq_0^\lambda$$

daar de tijd constant gehouden wordt. Maar ook geldt

$$19.53) \quad \delta \overset{\circ}{R} = \frac{\partial \overset{\circ}{R}}{\partial q^\lambda} \delta q^\lambda + \frac{\partial \overset{\circ}{R}}{\partial q_0^\lambda} \delta q_0^\lambda$$

zodat volgt

$$19.54) \quad \frac{\partial \dot{R}}{\partial q^k} = p_k \quad ; \quad \frac{\partial \dot{R}}{\partial q^0} = -p_0$$

Houden we nu  $q^0, t_0$  vast dan wordt  $R$  een functie alleen van  $q^k$  en  $t$  en we hebben

$$19.55) \quad \mathcal{L} = \frac{dR}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial q^k} \dot{q}^k = \frac{\partial R}{\partial t} + p_k \dot{q}^k$$

of (zie 19.7)

19.56)

$$\frac{\partial \dot{R}}{\partial t} = -H\left(\frac{\partial \dot{R}}{\partial q^k}, q^k, t\right)$$

en  $\dot{R}$  is dus een oplossing van de vergelijking van Hamilton-Jacobi. Men noemt  $R$  opgevat als functie van  $q^k, t_0, q^k, t$  dus als tweepuntsfunctie de eenvoudige eikonaalfunctie van het probleem. Daarentegen heet dan een algemene oplossing van de vergelijkingen van Hamilton-Jacobi de algemene eikonaal. (In de litteratuur is er geen eenheid in de naamgeving.) We gaan het volgende bewijzen: Iedere oplossing  $R(q, t)$  kan worden gevonden als men de eenvoudige eikonaal  $\dot{R}(q, t)$  heeft. Ga uit van de vergelijking (19.56) waarin  $H$  een bekende functie is maar neem verder niets aan. Men mag ter afkorting wel  $p_k$  schrijven voor  $\frac{\partial R}{\partial q^k}$  wanneer  $R$  een oplossing is, maar volstrekt niet aannemen dat er tussen de  $q^k$  en  $p_k$  kanonische vergelijkingen bestaan.

Is  $R$  een oplossing dan bepalen  $\frac{\partial R}{\partial t}$  en  $\frac{\partial R}{\partial q^k}$  een constant vectorveld in de filmruimte en dus een  $n$ -richting in elk punt. Omgekeerd bepaalt elke  $n$ -richting in een punt daarin plaatswaarden van  $\frac{\partial R}{\partial t}$  en  $\frac{\partial R}{\partial q^k}$ . Want die  $n$ -richting bepaalt een covariante vector alleen op een getalfactor na zodat men voor  $\frac{\partial R}{\partial t}$  en  $\frac{\partial R}{\partial q^k}$  vergelijkingen vindt van de vorm

$$19.57) \quad \frac{\partial R}{\partial t} = \alpha c_0 \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial q^k} = \alpha c_k$$

waarin  $c_0, c_1, \dots, c_n$  gegeven zijn en  $\alpha$  uit de  $\alpha$ -vergelijking

$$19.58) \quad -\alpha c_0 = H(\alpha c_0, q^k, t)$$

kan worden berekend (er zijn meerdere oplossingen mogelijk).

Ga nu uit van de een of andere bekende oplossing  $R(q^k, t)$  van (19.56) en neem een punt  $q^k, t_0$  op de  $X_n$  met de vergelijking

$$19.59) \quad R(q, t) = c \quad (c = \text{bepaalde constante})$$

Daar ter plaatse hebben we dan een covariante vector  $\frac{\partial R}{\partial q^k}, \frac{\partial R}{\partial t}$  rakende aan de  $X_n$ . Door  $q^k, t_0$  construeren we een kromme voldoende aan de eerste kanonische differentiaalvergelijking

$$19.60) \quad \frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial p_k}$$

waarin  $p_k$  niets is als een afkorting voor  $\frac{\partial R}{\partial q^k}$ . Het rechter lid van (19.60)

is dus een bekende functie van  $q^K$  en  $t$ . (19.60) telt dus  $n$  simultane gewone differentiaalvergelijkingen van de eerste orde voor met de onbekenden  $q^K$ . De oplossing zou bij verplaatsing van  $q_0$ ,  $t_0$  over de  $\chi_n$  een congruentie van  $\infty^n$  krommen geven door elk punt der  $\chi_n$  één. Voor de hulpvariabele  $p_\lambda$  geldt

$$19.61) \quad \frac{\partial p_\lambda}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial R}{\partial q^\lambda} = \frac{\partial}{\partial q^\lambda} \frac{\partial R}{\partial t}$$

$$19.62) \quad \frac{\partial p_\lambda}{\partial q^K} = \frac{\partial^2 R}{\partial q^\lambda \partial q^K} = \frac{\partial p_K}{\partial q^\lambda}$$

Maar aangezien

$$19.63) \quad \frac{\partial R(q^K, t)}{\partial t} = -H(p_\lambda, q^K, t); p_\lambda = \frac{\partial R}{\partial q^\lambda}$$

is

$$19.64) \quad \frac{\partial p_\lambda}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} \frac{\partial p_K}{\partial q^\lambda} - \frac{\partial H}{\partial q^\lambda}$$

en bijgevolg (zie 19.60)

$$19.65) \quad \begin{aligned} \frac{dp_\lambda}{dt} &= \frac{\partial p_\lambda}{\partial q^K} \frac{dq^K}{dt} + \frac{\partial p_\lambda}{\partial t} = \frac{\partial p_\lambda}{\partial q^K} \frac{dq^K}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p^K} \frac{\partial p_K}{\partial q^\lambda} - \frac{\partial H}{\partial q^\lambda} \\ &= \frac{\partial p_\lambda}{\partial q^K} \frac{dq^K}{dt} - \frac{\partial p_K}{\partial q^\lambda} \frac{dq^K}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q^\lambda} = - \frac{\partial H}{\partial q^\lambda} \end{aligned}$$

waaruit volgt dat nu  $p_\lambda$  langs de krommen der congruentie precies aan de tweede kanonische vergelijking voldoet.

Uitgaande van de functie  $H$  zijn we dus nu in de filmruimte tot één congruentie van  $\infty^n$  wereldlijnen gekomen, die blijken wereldlijnen van het mechanische probleem te zijn dat juist die functie als Hamiltonsche functie heeft. Dat probleem heeft in totaal  $\infty^{2n}$  wereldlijnen. De gekozen oplossing  $R(q, t)$  der vergelijking van Hamilton Jacobi pikt dus uit deze  $\infty^{2n}$  wereldlijnen er juist  $\infty^n$  uit. Deze  $\infty^n$  zijn elk elementenrijen en de  $n$ -richting in elk punt is gegeven door  $\frac{\partial R}{\partial q^\lambda}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial t}$ . Al deze

$n$ -richtingen vormen dus  $\infty^n \chi_n$ 's namelijk de  $\chi_n$ 's met de vergelijkingen  $R(q^K, t) = \text{constant}$ . Dus:

Iedere oplossing  $R(q^K, t)$  van de vergelijking van Hamilton Jacobi legt in de filmruimte de  $\infty \chi_n$ 's  $R(q^K, t) = \text{constant}$  vast en één congruentie van  $\infty^n$  elementenrijen waarvan de  $n$ -richtingen overal aan de  $\chi_n$ 's raken.

Langs ieder der  $\infty^n$  wereldlijnen is

$$dR = \frac{\partial R}{\partial t} dt + \frac{\partial R}{\partial q^\lambda} dq^\lambda = -H(p, q, t) + p_\lambda dq^\lambda = d(p, q, t) dt.$$

waarin  $p_\lambda$  afkortend staat voor  $\frac{\partial H}{\partial q^\lambda}$ . Neem dus op één zo'n wereldlijn 2 punten  $(q^k, t_0)$ ,  $(q^k, t)$ , dan is

$$R(q, t) - R(q_0, t_0) = \int_{q_0, t_0}^{q, t} \mathcal{L} R(q, t) dq dt = \overset{\circ}{R}(q_0, t_0, q, t).$$

Men kan dus iedere oplossing  $R(q, t)$  construeren door

- 1<sup>e</sup>. een niet ongeschikte  $X_n$  te kiezen (bij de  $n$ -richting in ieder punt moet een reële richting van een wereldlijn horen)
- 2<sup>e</sup>. de  $\infty^1$  wereldlijnen die door deze wereldlijnen worden vastgelegd te construeren
- 3<sup>e</sup>. op de  $X_n$  te stellen  $R(q, t) = C_0$  en vervolgens te construeren

$$R(q, t) = C_0 + \int_{q_0}^q R dt$$

langs iedere wereldlijn.

De bijzondere eikonaalfunctie voegt aan ieder stel van 2 punten een getal toe. De algemene eikonaal voegt aan iedere combinatie van een  $X_n$  en een punt een getal toe. In beide gevallen moeten de punten of het punt en de  $X_n$  geschikt gekozen zijn en zijn er soms meer oplossingen mogelijk. Trekt zich de  $X_n$  samen tot een punt dan gaat de algemene eikonaal over in de bijzondere.

## § 20. Vectoruitgebreidheden.

Het stelsel van  $2n-m$  onafhankelijke vergelijkingen

$$20.1) \quad F^x(\xi^k, w_\lambda) = 0; \quad x = m+1, \dots, 2n.$$

minimaal regulair in  $\mathcal{U}(\xi^k, w_\lambda); w_\lambda \neq 0$  stelt een systeem van covariante vectoren in  $X_n$  voor. Dit heet een  $\mathcal{U}_m = m$ -dimensionale vectoruitgebreidheid. Zijn de vergelijkingen homogeen in  $w_\lambda$ , dan heet de  $\mathcal{U}_m$  homogeen. Een homogene  $\mathcal{U}_m$  bevat naast een element  $\xi^k, w_\lambda$  ook alle elementen van de vorm  $\xi^k, \sigma w_\lambda$ . Uit een homogene  $\mathcal{U}_m$  kan men door op continue wijze in elk punt één element uit te zoeken een niet-homogene  $\mathcal{U}_{m-1}$  maken. Dit niet eenduidig bepaalde proces heet dishomogenisatie. Omgekeerd kan men uit een niet homogene  $\mathcal{U}_{m-1}$  op één en slechts één wijze een homogene  $\mathcal{U}_m$  maken. Dit proces heet homogenisatie. Behalve door de nulvorm (20.1) kan een  $\mathcal{U}_m$  ook gegeven worden in parametervorm

$$a) \quad \xi^k = \xi^k(\eta^\alpha)$$

20.2)

$$; \alpha = 1, \dots, m.$$

$$b) \quad w_\lambda = w_\lambda(\eta^\alpha)$$

minimaal regulair in  $\mathcal{M}(\eta^\alpha)$  waarin bij  $\eta^\alpha$  de waarden  $\xi^k, w_\lambda$  behoren. Is de  $\mathcal{M}$  homogeen dan kan men de parameters altijd zo kiezen dat de  $\xi^k$  homogeen van de graad 0 en de  $w_\lambda$  homogeen van de graad 1 in  $\eta^\alpha$  zijn.

Is  $r$  de  $w_\lambda$ -rang van (20.1) (=de rang van de matrix der afgeleiden naar  $w_\lambda$ ) dan kan (1.1) altijd vervangen worden door een stelsel van de vorm

$$a) F_\beta(\xi^k, w_\lambda) = 0$$

20.3)

$$; \beta = 1, \dots, r; \alpha = r+1, \dots, 2n-m$$

$$b) G^\alpha(\xi^k) = 0$$

De  $F_\beta$  hebben een rang  $r$  t.o. van  $w_\lambda$  en de  $G^\alpha$  een rang  $2n-m-r$  t.o. van  $\xi^k$ . Dus is  $2n-m-r \leq n$  en dus  $r \geq n-m$ .

(20.3b) stelt een  $X_t$ ;  $t = m-n+r$  voor, het veldgebied der  $\mathcal{M}_m$ . Buiten dit gebied zijn er geen elementen van  $\mathcal{M}_m$ .  $t$  heet de dimensie van  $\mathcal{M}_m$ . In elk punt van  $X_t$  zijn er  $\omega^{m-t} = \omega^{n-r}$  covariante vectoren. Deze vormen in dit punt wat men een  $\mathcal{M}_{m-t}$  noemt. Dus is een  $\mathcal{M}_m$  een  $\mathcal{M}_{m-t}$ -veld over een  $X_t$ . In de parametervorm (20.2) is  $t$  de rang van de  $\xi^k$  ten opzichte van de  $\eta^\alpha$  omdat dan en alleen dan uit (20.2a) precies  $n-t$  vergelijkingen tussen de  $\xi^k$  kunnen worden afgeleid. (Eliminatie theorema.)

Uit de aard der zaak is  $t$  geen invariante bij  $C_3$ -transformaties.

Uit de  $F^x$  in (20.1) kan men de volgende uitdrukkingen vormen in alle nulpunten van (20.1) (d.z. alle waarden  $\xi^k, w_\lambda$  die aan (20.1) voldoen):

$$20.4) \left. \begin{aligned} K^x &\stackrel{\text{def}}{=} w_\lambda \frac{\partial F^x}{\partial w_\lambda} = (F^x) \\ K^{xy} &\stackrel{\text{def}}{=} (F^x, F^y) \end{aligned} \right\} \text{voor } F^x = 0 \\ x, y = m+1, \dots, 2n$$

Gaat men over tot een equivalent stelsel  $F^{x'} = 0$  (basistransformatie) dan is (basisstelling)

$$20.5) \begin{aligned} (F^{x'}) &= C_x^{x'} (F^x) \pmod{F^x} \\ (F^{x'}, F^{y'}) &= C_x^{x'} C_y^{y'} (F^x, F^y) \pmod{F^x} \end{aligned}$$

waarin de  $C_x^{x'}$  functies van  $\xi^k, w_\lambda$  zijn. Aangezien  $K^x$  en  $K^{xy}$  alleen maar voor elementen der  $\mathcal{M}_m$  gedefinieerd zijn en voor deze  $F^x = 0$  volgt dus

$$20.6) \begin{aligned} K^{x'} &= C_x^{x'} K^x & x, y = m+1, \dots, 2n; \\ K^{x'y'} &= C_x^{x'} C_y^{y'} K^{xy} & x', y' = (m+1)', \dots, (2n)'. \end{aligned}$$

$K^{xy}$  heet de Poissonbivector van de  $\mathcal{M}_m$  en ook van (20.1).  $K^x = 0$  wanneer de  $\mathcal{M}_m$  homogeen is. Uit  $K^x$  en  $K^{xy}$  worden de volgende invarianten voor coördinatentransformaties en basistransformaties afgeleid.

20.7)

|                                |                                                                                            |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| <u>rotatieklasse</u>           | $2\varphi$ : rang van $K^{xy}$                                                             |
| <u>klasse</u>                  | $K$ : x-rang van $K^x, K^{xy}$                                                             |
| <u>gelijkvormigheidsklasse</u> | $k$ : het grootste oneven getal $\leq K$                                                   |
| <u>de index</u>                | $\ell$ : de rang van $K^x$ , dus $\ell = 1$ voor $K^x \neq 0$ en $\ell = 0$ voor $K^x = 0$ |

Indien  $m, n$  en  $t, n$  is de  $\mathcal{M}_m$  een gewoon vectorveld in  $X_n$ . Dan gaan  $2\varphi, K$  en  $k$  over in de gelijkvormige invarianten van dit veld en is  $\ell = 1$ .

Het gedrag der invarianten bij  $C$ -transformaties kan nu gemakkelijk worden afgeleid uit (20.4) en (18.14). Men vindt dan

20.8)

|          | $C_1$ -transformatie                                                                                                                                                                                                  | $C_2$ -transformatie                                          | $C_3$ -transformatie                                |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
|          | $'w_\lambda d'\xi^\lambda = \mu w_\lambda d\xi^\lambda$                                                                                                                                                               | $'w_\lambda d'\xi^\lambda = w_\lambda d\xi^\lambda + d\Omega$ | $'w_\lambda d'\xi^\lambda = w_\lambda d\xi^\lambda$ |
| $K^{xy}$ | $\frac{1}{\mu} (K^{xy} + 2\mu v^x K^{xy})$<br>waarin:<br>$v^x \stackrel{\text{def}}{=} \lambda (F^x, \frac{1}{\mu})$<br>$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} 1 - w_\lambda \frac{\partial \log \mu}{\partial w_\lambda}$ | $K^{xy}$                                                      | $K^{xy}$                                            |
| $K^x$    | $\lambda K^x$                                                                                                                                                                                                         | $K^x + (\Omega, K^x)$                                         | $K^x$                                               |

en hieruit volgt

20.8)

|            | $C_1$ -transformatie       |                            | $C_2$ -transformatie |              | $C_3$ -transformatie |
|------------|----------------------------|----------------------------|----------------------|--------------|----------------------|
|            | $K$ even                   | $K$ oneven                 | $K$ even             | $K$ oneven   |                      |
| $K$        | $K$ of $K-1$               | $K$ of $K+1$               | $K$ of $K+1$         | $K$ of $K-1$ | $K$                  |
| $2\varphi$ | $2\varphi$ of $2\varphi-2$ | $2\varphi$ of $2\varphi+2$ | $2\varphi$           | $2\varphi$   | $2\varphi$           |
| $k$        | $k$                        | $k$                        | $k$ of $k+2$         | $k$ of $k-2$ | $k$                  |
|            | 1                          | 1                          | 1 of 0               | 1 of 0       | 1                    |
|            | 0                          | 0                          | 0 of 1               | 0 of 1       | 0                    |

We kunnen nu ook arithmetische invarianten gaan afleiden uitgaande van de parametervergelijkingen (20.2). In  $X_m$  der  $\eta^a$  definiëren wij het covariante vectorveld

20.10)  $U_b \stackrel{\text{def}}{=} w_\lambda \partial_b \xi^\lambda$ ;  $b = 1, \dots, m$ .

Dan is

20.11)  $w_\lambda d\xi^\lambda = w_\lambda (\partial_b \xi^\lambda) d\eta^b = U_b d\eta^b$

De rotatie van het veld  $U_\xi$  is

$$20.12) \quad U_{\xi\eta} \stackrel{\text{def}}{=} 2 \partial_{[\xi} U_{\eta]} = 2 (\partial_{[\xi} w_{|\lambda|}) \partial_{\eta]} \xi^\lambda = \{\eta^c, \eta^b\}$$

Uit het vectorveld  $U_\xi$  vormen we de gewone invarianten en duiden deze aan met  $\bar{K}$ ,  $\bar{2}\rho$  en  $\bar{k}$ . Men kan dan bewijzen dat

$$20.13) \quad \begin{aligned} \bar{K} &= K + 2(m-n) \\ \bar{2}\rho &= 2\rho + 2(m-n) \\ \bar{k} &= k + 2(m-n) \end{aligned}$$

en dit zowel voor  $m \geq n$  als voor  $m < n$ . De betekenis van het nul worden van  $K^*$ ,  $K^{xy}$ ,  $U_\xi$  of  $U_{\xi\eta}$  is de volgende

$$20.14) \quad \begin{aligned} K^* &= 0 \quad \text{in het definitiegebied: de } \mathcal{N}_m \text{ is homogeen (n.e.v.)} \\ U_\xi &= 0 \quad \text{in de } X_m \text{ der } \eta^\alpha \text{ en dus } U_{\xi\eta} = 0 : \text{de } \mathcal{N}_m \text{ is een } N_m \\ K^{xy} &= 0 & (F^x, F^y) = 0 \text{ ingevolge (20.13)} \\ U_{\xi\eta} &= 0 & : \{\eta^c, \eta^b\} = 0 \text{ ingevolge (20.8)} \end{aligned}$$

Uit (20.13) volgt voor  $m < n$  dat  $\bar{K} \geq 2(n-m)$  is, daar  $K$  niet negatief kan zijn. Is dus het systeem (20.1) in involutie, d.w.z.  $K = 1$  of  $K = 0$ , dan is altijd  $m \geq n$ .

Voor  $m > n$  volgt dat  $\bar{K} \geq 2(m-n)$ , omdat  $K$  niet negatief zijn kan. Is dus de  $\mathcal{N}_m$  een  $N_m$ , d.w.z. is  $\bar{K} = 0$ , dan is altijd  $m \leq n$ ,

## § 21. Integrabiliteit der vectoruitgebreidheden.

Een  $\mathcal{N}_{m'}$ ,  $m' \leq m$  waarvan alle elementen behoren tot een  $\mathcal{N}_m$  heet een integraal- $\mathcal{N}_m$  van deze  $\mathcal{N}_m$ .

Een  $\mathcal{N}_m$  heet volledig integrabel voor integraal  $\mathcal{N}_m$ 's van een klasse  $K'$  en een dimensie  $t'$ , ~~immers er is~~ voor elk element der  $\mathcal{N}_m$  tenminste één  $\mathcal{N}_{m'}$ , van die klasse en die dimensie bestaat, die dat element bevat.

Een integraal  $\mathcal{N}_{m'}$ , waarvoor  $m' = n$  en  $t' = n$  is en  $K' = 1$ , is een gradientveld  $\partial_\lambda p$ , dat aan de differentiaalvergelijkingen

$$21.1) \quad F^x(\xi^k, \partial_\lambda p) = 0; \quad x = m+1, \dots, 2n. \quad 2n-m < n.$$

voldoet. Het vinden van een oplossing van dit stelsel staat dus gelijk met de bepaling van een integraal -  $\mathcal{N}_n$  van de klasse 1 en de dimensie  $n$ . Het meer algemene type oplossing dat door Lie werd beschouwd komt overeen met een integraal  $\mathcal{N}_n$  van de klasse 1 en een dimensie  $< n$ .

We gaan nu vragen stellen:

1. Voor welke waarden van  $m'$ ,  $K'$  en  $t'$  is de  $\mathcal{N}_m$  volledig integrabel?
2. Hoe vindt men de integraal -  $\mathcal{N}_m$ 's bij volledige integrabiliteit?
3. Bestaan er integraal -  $\mathcal{N}_m$ 's van de klasse  $K'$  en dimensie  $t'$  ook wanneer er geen volledige integrabiliteit is?
4. Hoe bepaalt men deze  $\mathcal{N}_m$ 's?

Vraag 1. We laten eerst  $t'$  vrij en bepalen de integraal -  $\mathcal{N}_m$ 's van een gegeven klasse  $K'$ . Men moet dus bij (20.1) juist  $m-m'$  vergelijkingen toevoegen. Deze bepalen in de  $X_m$  der parameters  $\eta^\alpha$  een  $X_{m'}$  en in deze  $X_{m'}$  bepaalt  $\mathcal{N}_m$  een vectorveld dat de doorsnede is van het veld  $\mathcal{U}_\ell$  met de  $X_{m'}$ . Dit veld moet de klasse  $\bar{K}' = K' + 2(m'-n)$  hebben. De klasse van  $\mathcal{U}_\ell$  was  $\bar{K} = K + 2(m-n)$ . Dus is

$$21.2) \quad \bar{K}' = \bar{K} - (K - K' + 2m - 2m')$$

en het komt er dus op neer dat in de  $X_m$  een  $X_{m'}$  moet worden geconstrueerd die een klasseverlaging  $K - K' + 2(m-m')$  geeft. Anders gezegd er moeten  $m-m'$  functies der  $\eta^\alpha$  worden gevonden die een index  $K - K' + 2(m-m')$  ten opzichte van het veld  $\mathcal{U}_\ell$  hebben. Nu herinneren we ons de voorwaarde (8.1). Deze vertalen we:

$$\begin{aligned} n &\longrightarrow m \\ K &\longrightarrow \bar{K} = K + 2(m-n) \\ K &\xrightarrow{S} \bar{K} - \bar{K}' = K - K' + 2(m-m') \\ &\quad \quad \quad \downarrow \\ &\quad \quad \quad m-m' \end{aligned}$$

dan krijgen we het integrabiliteitstheorema der  $\mathcal{N}_m$ :

Een  $\mathcal{N}_m$  van de klasse  $K$  is dan en alleen dan volledig integraal voor integraal -  $\mathcal{N}_m$ 's van de klasse  $K'$  ; indien

$$21.3) \quad \begin{aligned} K &\leq K' \leq K + 2(m-m') \\ 2n - 2m' &\leq K' \leq 2n - m' \end{aligned}$$

Dat de voorwaarden noodzakelijk zijn is triviaal (dit na te gaan!) Wat nu de integraal  $\mathcal{N}_m$ 's betreft voor het niet integrabele geval, het is duidelijk dat altijd

$$K' \geq K + 2(m-m')$$

want een doorsnijding met  $\mathcal{U}_\ell$  kan wel klasseverlaging maar geen klasseverhoging geven. Men lette er op dat de klassen in  $X_m$  (de gestreepte) verlaagd worden en die welke uit de nulvergelijkingen afgeleid zijn (de ongestreepte) dus verhoogd worden.

Gaat men nu ook de  $t'$  in beschouwing nemen dan krijgt men een aantal theorema's. Het belangrijkste hiervan luidt:

Iedere  $\mathcal{N}_m$  van de klasse  $K$  is volledig integraal voor integraal  $\mathcal{N}_m$ 's van de klasse  $K'$  en dezelfde dimensie als  $\mathcal{N}_m$  indien de integrabiliteitsvoorwaarden (21.3) gelden en indien bovendien

$n \leq m' < m$  is en voor een homogene  $\mathcal{N}_m$  niet tegelijk  $K' = K$  en  $m' = n$ .

2. De bepaling der  $\mathcal{N}_m$ 's in het integrabelgeval. Men heeft in de  $X_m$  der  $\eta^\alpha$   $(m-m')$  functies te bepalen met index  $(K - K') + 2(m-m')$ . Dit kost voor  $K' - K$  even volgens § 7 de operaties

$$21.4) \quad \bigcirc_{\bar{K}-1}, \bigcirc_{\bar{K}-3}, \dots, \bigcirc_{\bar{K}-K+K'-2(m-m')+1}$$

of anders geschreven

$$21.5) \quad O_{K+2(m-n)-1}, O_{K+2(m-n)-3}, \dots, O_{K'+2(m'-n')+1}$$

Voor  $K' - K$  oneven kost het wegens § 7 de operaties

$$21.6) \quad O_{K+2(m-n)-1}, O_{K+2(m-n)-3}, \dots, O_{K'+2(m'-n')+2}$$

en een operatie

$$O_{K'+2(m'-n')+1} \quad \text{voor } K'+2(m'-n') > 1$$

$$21.7) \quad O_1 \quad \text{voor } \dots = 1$$

$$O_0 \quad \text{voor } \dots = 0$$

Tot nu werkten we in de  $X_{m,n}$ . Men kan dit nu terug vertalen naar de  $X_{m,n}$ . In het geval dat  $(K - K') + 2(m - m') = 1$  is hebben we een functie met index 1 te bepalen. In alle andere gevallen beginnen we het proces met de bepaling van een functie van index 2.

Beschouwen we hier nu alleen die gevallen en zij  $f(\eta^a)$  die functie. Dan stelt

$$21.8) \quad f(\eta^a) = \text{constant}$$

een normaalsysteem van  $X_{m,n-1}$ 's in  $X_{m,n}$  voor wier doorsnede met het veld  $H_b$  de klasse  $K-2$  heeft. Lossen we nu de  $\eta^a$  op uit (20.2) en substitueren we deze waarden in (21.8) dan ontstaat een vergelijking

$$21.9) \quad F^0(\xi^K, w_\lambda) = 0$$

die tezamen met (20.1) een  $\mathcal{U}_{m,n-1}$  voorstelt van de klasse  $K$ . Men lette er op dat de klasseverlaging in  $X_{m,n}$  en de klasseverhoging in  $X_{m,n}$  tengevolge van één functie  $f(\eta^a)$  resp.  $F^0(\xi^K, w_\lambda)$  als volgt gecoördineerd zijn:

$$21.10) \quad \begin{array}{ccc} \bar{K} \rightarrow \bar{K}-2 & & K \rightarrow K \\ \bar{K}-1 & & K+1 \\ \bar{K} & & K+2 \end{array}$$

$F^0$  kan nu ook anders worden bepaald. Aangezien  $\mathcal{U}_{m,n-1}$  de klasse  $K$  moet hebben en we voor  $K$  oneven weten dat

$$21.11) \quad (F^{[X_1]}, F^{X_2}) \dots (F^{X_{K-1}}, F^{X_{K-1}}) (F^{X_K}) \not\equiv 0 \pmod{F^X}$$

$$(F^{[X_1]}, F^{X_2}) \dots (F^{X_K}, F^{X_{K+1}}) \equiv 0 \pmod{F^X}$$

moet  $F^0$  voor  $K$  oneven een oplossing zijn van de congruentie

$$21.12) \quad (F^{[X_1]}, F^{X_2}) (F^{X_K}, F^0) \equiv 0 \pmod{F^X, F^0}$$

Voor  $K$  even weten we al dat

$$21.13) \left. \begin{aligned} (F^{x_1}, F^{x_1}) &\dots (F^{x_k}, F^{x_k}) \equiv 0 \neq 0 \\ (F^{x_1}, F^{x_1}) &\dots (F^{x_k}, F^{x_k})(F^{x_{k+1}}) \equiv 0 \\ (F^{x_1}, F^{x_1}) &\dots (F^{x_{k+1}}, F^{x_{k+2}}) \equiv 0 \end{aligned} \right\} \pmod{F^x}$$

en dus is  $F^0$  een oplossing der congruenties

$$21.14) \left. \begin{aligned} (F^{x_1}, F^{x_1}) &\dots (F^{x_k}, F^{x_k})(F^0) \equiv 0 \\ (F^{x_1}, F^{x_1}) &\dots (F^{x_{k+1}}, F^0) \equiv 0 \end{aligned} \right\} \pmod{F^x, F^0}$$

Het is onaangenaam dat  $F^0$  door congruenties wordt vastgelegd terwijl  $\dagger$  door vergelijkingen bepaald werd. Het is echter altijd mogelijk de vergelijkingen van de  $\mathcal{U}_n$  zo te schrijven dat er voor  $F^0$  vergelijkingen in plaats van congruenties komen.

## 22. Toepassing op de oplossing van stelsels differentiaalvergelijkingen.

Beschouw het stelsel

$$22.1) F^x(\xi^k, \partial_\lambda p) = 0 ; m \geq n$$

Neem aan dat dit stelsel in involutie is, d.w.z. alle haaksymbolen  $(F^x, F^y)$  zijn nul. Dan stelt

$$22.2) F^x(\xi^k, w_\lambda) = 0$$

een  $\mathcal{U}_n$  in  $X_n$  voor van de klasse 0 als de  $F^x$  alle homogeen in  $w_\lambda$  zijn en van de klasse 1 als er tenminste één niet homogeen is. Integreren van (22.1) wil zeggen een integraal -  $\mathcal{U}_n$  van de klasse 1 en de dimensie  $n$  te bepalen, want dit is een gradiëntveld voldoende aan (22.1). In het niet homogene geval is  $K=1$  en  $K'=1$  en  $m'=n$ . Voor het niet homogene geval zijn dus de operaties

$$22.3) O_{2(m-n)}, O_{2(m-n-1)}, \dots, O_2$$

en voor het homogene geval

$$22.4) O_{2(m-n)-1}, O_{2(m-n-1)-1}, \dots, O_1$$

Deze methode is in de litteratuur bekend als de tweede methode van Jacobi.

Omdat  $K'=1$  is, is de  $\mathcal{U}_n$  een  $N_n$ . Het kan zijn dat de dimensie van  $\mathcal{U}_n$  gelijk  $n$  is (en men kan dit altijd bereiken), dan is  $N_n$  een gewoon gradiëntveld  $\partial_\lambda p$  en  $p$  kan bepaald worden door een operatie  $O_n$ .

Bij deze laatste integratie treedt nog één integratieconstante op.

Zijn  $F^{n_1}, \dots, F^{n_{n+1}}$  de functies die achtereenvolgens aan de  $F^x$  worden toegevoegd dan is de  $N_n$  gegeven door de vergelijkingen

$$22.5) F^x = 0 ; F^{n+1} = C^{n+1} ; \dots ; F^{n_n} = C^n$$

en hier treden dus  $m-n$  integratieconstanten op. Totaal zitten er dus in  $\mathcal{P}$  juist  $m-n+1$  integratieconstanten. Men noemt dat een volledige oplossing.

Gaat men niet verder dan  $\partial_\lambda \mathcal{P}$  dan stelt een volledige oplossing een stelsel van  $\infty^{m-n} N_n$ 's d.w.z.  $\infty^{m-n}$  stellen van  $\infty^n$  vectorelementen, bij elkaar constituerende de  $\infty^m$  vectorelementen van de gegeven  $\mathcal{U}_m$ . Laten we nu de conditie  $t' = n$  vallen dan krijgen we toch  $\infty^{m-n} N_n$ 's maar elke  $N_n$  is een  $\mathcal{V}^{n-t'}$ -veld over een  $X_{t'}$ . Totaal hebben we weer de  $\infty^m$  vectorelementen der  $\mathcal{U}_m$ . Men noemt nu zulk een stelsel van  $\infty^{m-n} N_n$ 's, elk van willekeurige dimensie een volledige oplossing in de zin van Lie. Belangrijk is dat zulk een volledige oplossing invariant is bij  $C_3$ -transformaties. Dat is een volledige oplossing in engere zin niet, omdat de dimensie  $n$  niet invariant blijft.

Is  $K=1$  (niet homogeen geval) dan moet de eerst ingevoerde functie voldoen aan

$$22.6) \quad (F^*, F) = 0$$

is  $F^m$  zulk een oplossing dan gaat men door en bepaalt een oplossing van

$$22.7) \quad (F^*, F) = 0 ; (F^m, F) = 0$$

enz. Maar nu zou het kunnen zijn dat men van (22.6) toevallig meer dan één oplossing heeft. Volgens de normale gang van de tweede methode van Jacobi hebben we daar niets aan, we kiezen er eenvoudig een uit en laten de andere lopen. Lie heeft nu echter een methode ontwikkeld (de methode der functiegroepen) om van zulke meerdere oplossingen profijt te trekken en het aantal en de orde der benodigde operaties te verlagen.

### 23. Bepaling der integraal- $\mathcal{U}_m$ 's voor $k' < k$ .

Dit is de derde vraag opgeworpen in § 21. Aan de vergelijkingen

$$23.1) \quad F^X(\xi^*, w_\lambda) = 0 ; X = m+1, \dots, 2n$$

voegen we nu de conditie toe

$$K^{[x_1, x_2, \dots, x_{k'}]} \quad \text{voor } k' \text{ oneven}$$

$$23.2) \quad \left. \begin{aligned} K^{[x_1, x_2, \dots, x_{k'}, x_{k'+1}]} &= 0 \\ K^{[x_1, x_2, \dots, x_{k'+1}, x_{k'+2}]} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{voor } k' \text{ even}$$

*functie  $\mathcal{R}^*$*

Zij het aantal onafhankelijke vergelijkingen in (23.1,2) gelijk  $2n-m^*$ ,  $m^* < m$ . Dan stellen (23.1,2) een  $\mathcal{U}_{m^*}$  voor die integraal- $\mathcal{U}_{m^*}$  van  $\mathcal{U}_m$  is. Iedere integraal- $\mathcal{U}_{m^*}$  van de klasse  $K'$  van de  $\mathcal{U}_m$  is ook integraal- $\mathcal{U}_{m^*}$  van  $\mathcal{U}_{m^*}$  en omgekeerd omdat  $\mathcal{U}_{m^*}$  in  $\mathcal{U}_m$  vervat is. Is nu

$$23.3) \quad \begin{aligned} K^* \leq K' \leq K^* + 2(m^* - m') \quad m' \leq m^* \\ 2n - 2m' \leq K' \leq 2n - m' \end{aligned}$$

dan is  $\mathcal{U}_{m^*}$  volledig integrabel voor integraal  $\mathcal{U}_{m'}$ 's van de klasse  $K'$ . Dan bepaalt men de integraal  $\mathcal{U}_{m'}$ 's der  $\mathcal{U}_{m^*}$  en het probleem is opgelost. Is  $K' > K^* + 2(m^* - m')$  of is  $m' > m^*$  dan heeft  $\mathcal{U}_{m^*}$  en dus ook  $\mathcal{U}_{m'}$  geen integraal  $\mathcal{U}_{m'}$ 's van de klasse  $K'$ . In de resterende gevallen gaat men met  $\mathcal{U}_{m^*}$  op dezelfde wijze door en vindt ten slotte na een eindig aantal stappen een vectoruitgebreidheid die dezelfde integraal  $\mathcal{U}_{m'}$ 's van de klasse  $K'$  bezit als  $\mathcal{U}_{m'}$  en waarvan vaststaat of dat zij voor deze  $\mathcal{U}_{m'}$ 's volledig integrabel is of dat zij dergelijke integraal  $\mathcal{U}_{m'}$ 's niet bezit.

Voor  $K > 1$  en  $K' = 1$ ,  $m' = n$  is dit de welbekende methode om een systeem van  $2n - m$  partiële differentiaalvergelijkingen

$$23.4) \quad F^x(\xi^*, w_\lambda) = 0; w_\lambda = \partial_\lambda p; x = n+1, \dots, 2n$$

over te voeren in een systeem in involutie. Men voegt toe de vergelijkingen

$$23.5) \quad (F^x, F^y) = 0; x, y = n+1, \dots, 2n$$

Als hierdoor een systeem in involutie met  $2n - m^* < n$  verkregen is stopt men. Is weliswaar nog  $2n - m^* < n$  maar het systeem nog niet in involutie dan gaat men door. Tenslotte ontstaat een systeem in involutie met een aantal vergelijkingen  $< n$  of een systeem van  $n$  of meer vergelijkingen dat geen oplossing toelaat.